REVISTA ENSINO DE CIÊNCIAS E HUMANIDADES

UFAM

RECH- Revista Ensino de Ciências e Humanidades – Cidadania, Diversidade e Bem Estar. **ISSN 2594-8806**

Vol V, núm. 2, jul-dez, 2021, pág-45-67.

ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS PARA O ENSINO DO CÁLCULO DE INTEGRAIS DE FUNÇÕES RACIONAIS

METHODOLOGICAL STRATEGIES FOR TEACHING OF THE CALCULATION OF INTEGRALS RATIONAL FUNCTIONS

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DE INTEGRALES DE FUNCIONES RACIONALES

Venâncio Sebastião Finda
José Luiz Magalhães de Freitas

RESUMO

Esta pesquisa objectivou investigar estratégias metodológicas presentes no ensino do cálculo de integrais de funções racionais no processo de ensino e aprendizagem. Está direccionado no Ensino de Matemática aos alunos dos primeiros anos das opções de Matemática e Física do Instituto Superior de Ciências de Educação do Uíge (Angola) no cálculo de integrais de funções racionais. É uma pesquisa que se assentou num modelo quantitativo e baseou-se numa estratégia explicativa, porque procurou relacionar a causa-efeito, demonstrando a influência que as estratégias metodológicas têm sobre o desenvolvimento das habilidades dos alunos no cálculo. O suporte teórico-metodológico em que a pesquisa se baseou foi a revisão bibliográfica baseada em vários manuais didácticos de cálculo diferencial e integral entre outros da literatura, onde se obteve alguns pontos de vistas sobre o assunto em estudo e a estatística para a análise de dados produzidos pelos participantes. Para a formatação do texto desta pesquisa, utilizou-se a Norma da Associação dos Psicólogos Americanos para apresentar as citações e as referências bibliográficas. Para verificar a eficácia da intervenção desta e a consequente comprovação da hipótese levantada, apoiou-se no teste t de Student para amostra pareada, num grupo de 89 (77.39%) entre os 115 alunos que compõem a população, isto é, o total dos alunos do primeiro ano de ensino de Matemática e Física do ano 2019. Por fim, realizou-se análise comparativa dos resultados obtidos nos testes aplicados, pré-teste e pós-teste, onde notou-se resultados satisfatório no pós-teste, o que comprovou a validez da pesquisa realizada.

Palavras-chave: Ensino do cálculo, Estratégias de resolução, Integrais de funções racionais.

ABSTRACT

This research aimed to investigate methodological strategies present in teaching the calculation of integrals of rational functions in the teaching and learning process. It is aimed at teaching Mathematics to students of the first years of the options of mathematics and Physics of the Higher Institute of Educational Sciences of Uíge (Angola) in calculating integrals of rational functions. It is a research that was based on a quantitative model and was based on an explanatory strategy, because it sought to relate cause and effect, demonstrating the influence that methodological strategies have on the development of students ´skills in calculus. The theoretical and methodological support on which the research was based was the bibliographic review based on several didactic manuals of differential and integral calculus, among others of the literature, where some points of view on the subject under study and the statistics for data analysis were obtained produced by the participants. To format the text of this research, the Standard of the American Psychologists Association was used to present citations and bibliographical references. In order to verify effectiveness of the intervention and the consequent proof of the hypothesis raised, the Student´s t test for paired sample was supported, in a group of 89 (77.39%) among the 115 students that make up the papulation, that is, the total students of the first year of Mathematics and Physics teaching in the year 2019. Finally, a comparative analysis of the results obtained in the applied tests, pre-test and pos-test was carried out where satisfactory results were noted in the pos-test, which proved the validity of the research carried out.

Keywords: Calculus teaching, Resolution strategies, Integrals of rational functions.

RESUMEN

Esta investigación tuvo como objetivo investigar las estrategias metodológicas presentes en la enseñanza del cálculo de integrales de funciones racionales en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Está dirigido a la enseñanza de Matemáticas a estudiantes de los primeros años de la opciones de Matemática y Física del Instituto Superior de Ciencias de la Educación de la Uíge (Angola) en el cálculo de integrales de funciones racionales. Se trta de una investigación que se basó en un modelo cuantitativo y se basó en una estrategia explicativa, pues buscó relacionar causa y efecto, demostrando la influencia que tienem las estrategias metodológicas en el desarrollo de las habilidades de los estudiantes en cálculo. El sustento teórico y metodológico en el que se basó la investigación fue la revisión bibliográfica a partir de varios manuales didácticos de cálculo diferencial e integral, entre otros de la literatura, donde se obtuvieron algunos puntos de vista sobre el tema en estudio y lasestadisticas para el análisis de datos. produzidos por los participantes.Para formatear el texto de esta investigación se utilizó el Estándar de la Associación Americana de Psicólogos para presentar citas y referencias bibliográficas. Para comprobar la efectividad de la intervención y la consecuente prueba de la hipótesis planteada, se apoyó la prueba t de Student para muestra pareada, en un grupo de 89 (77.39%) entre los 115 alumnos que componen la población, es decir, el total de estudiantes del primer año de la docencia de Matemáticas y Física en el año 2019. Finalmente, se realizó un análisis comparativo de los resultados obtenidos en las prueba aplicadas, preprueba y posprueba, donde se constató resultados satisfactorios en la posprueba, que demostró la validez de la investigación realizada.

Palabras clave: Enseñanza del cálculo, Estrategias de resolución, Integrales de funciones racionales.

INTRODUÇÃO

Este artigo aborda o ensino de integrais de funções racionais buscando aplicar estratégias metodológicas adequadas. Assim, o objectivo é investigar estratégias metodológicas que estejam presentes no ensino do cálculo de integrais de funções racionais para alunos dos primeiros anos das opções do Ensino de Matemática e Física do Instituto Superior de Ciências de Educação do Uíge (Angola).

A pesquisa realizada procurou responder a problemática: como contribuir para o desenvolvimento de habilidades no cálculo de integrais de funções racionais por alunos dos primeiros anos das opções de ensino de Matemática e Física do Instituto Superior de Ciências de Educação do Uíge (Angola)? Face a esta problemática, deu-se a seguinte perspectiva de solução: se se elaborar uma estratégia metodológica adequada que se sustenta num algoritmo, então pode-se propor atividades visando desenvolver habilidades dos alunos do I ano das opções do ensino de Matemática e Física do Instituto Superior de Ciências de Educação do Uíge no cálculo de integrais de funções racionais.

Assim, a pesquisa originou-se a partir da identificação de dificuldades que os alunos do I ano das opções de Ensino de Matemática e de Física do ISCED-UÍGE apresentam nas aulas de Análise Matemática I quando se trata do cálculo de integrais de funções racionais. Dificuldades que podem estar relacionadas com:

- ✓ Base inadequada de conhecimentos sobre a noção de derivadas de funções;
- ✓ Fraco domínio das técnicas de integrais indefinidas de funções;
- ✓ Conhecimentos insuficientes sobre a divisão de polinómios;
- ✓ Fraco domínio sobre a factorização de um polinómio;
- ✓ Fraco domínio de resolução de sistemas de equações;
- ✓ Domínio insuficiente em decompor uma fracção racional em fracções parciais.

Sendo assim, surgiu o interesse de pesquisar este assunto em que se pensa na utilização de uma estratégia metodológica adequada e que se sustenta num determinado algoritmo pode ajudar a superar dificuldades apresentadas pelos alunos do I ano das opções de Ensino de Matemática e Física do Instituto Superior de Ciências de Educação do Uíge.

A fundamentação teórica desta pesquisa está apoiada numa revisão bibliográfica realizada em vários livros didácticos[1] de cálculos e outros relacionados com métodos e técnicas de nível empírico, teórico e estatístico matemático. O trabalho de campo foi feito por meio de entrevista dirigida ao docente e inquerito com alunos das opções de Ensino de Matemática e Física. Os resultados são apresentados de forma tabular e gráfica.

ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS

Essas estratégias metodológicas, visam identificar maneiras que um professor pode utilizar para atingir, de forma eficaz, os seus objectivos no processo de ensino e aprendizagem. Como relata López (2004) **“**as estratégias metodológicas são as formas de atingir nossos objectivos em menos tempo com menos esforços e melhores resultados**”**.

Algumas Estratégias Metodológicas do Ensino do Cálculo de Integrais de Funções Racionais

Concordando com López (2004), apresentamos sete (7) estratégias metodológicas consideradas importantíssimas no processo de ensino do cálculo de integrais de funções racionais para assim o professor alcançar em pouco tempo melhores resultados na aprendizagem dos seus alunos. Como diz (Angola, 2016, p. 4002) na alínea a) do 63º artigo: “preparar quadros com alto nível de formação científica, técnica, cultural e humana, em diversas especialidades correspondentes a todas as áreas do conhecimento”. Com esse intuito, salienta-se:

1. **O uso dos métodos de ensino para o cálculo de integrais de funções racionais**

Sabe-se que “os métodos de ensino são as acções do professor pelas quais se organizam as actividades de ensino e dos alunos para atingir objectivos do trabalho docente em relação a um conteúdo específico”. (Libâneo, 1994, p. 152). Neste sentido, o professor deve usar os métodos que lhe permitirão alcançar mais rapidamente os objectivos que ele próprio traçou durante a elaboração dos seus planos de aula. Como diz (Alberto, 2017, p. 67), “são métodos adequados aqueles que permitem alcançar os objectivos traçados”. Por isso, quando o professor introduzir pela primeira vez a aula, ele pode utilizar o método

---

[1] Significa aquele adotado em estabelecimento de ensino, cujo texto se enquadrada nas exigências do programa escolar; ivro de texto. (Doretto, 2014, p. 30)

expositivo, porque os alunos não têm consigo os elementos essenciais para o cálculo, mas pode também levantar algumas questões sobre o tema. Ministrando ou não aulas expositivas, o professor deve utilizar o método de elaboração conjunta, porque os alunos dessa faixa etária já têm as ferramentas fundamentais para compreenderem o cálculo das integrais destas funções e, depois o professor pode utilizar o método de trabalho independente, tendo em conta o modelo construtivista, o aluno deve ser o responsável pela sua formação, o professor desempenhará apenas o papel de facilitador. Para o cálculo de integrais destas funções, o método de trabalho independente é importante porque tendo a atitude mental do aluno como o seu ponto forte, deve ajudá-los em fortificarem-se com as técnicas de integração ou de resolução das integrais das mesmas funções. Segundo (Miranda & Echevarría, 2019, p. 49), **"**o estudante realiza tarefas educativas sob orientação do docente, de maneira a ajudá-lo a transitar pelas várias etapas de aprendizagem. É fundamental para o desenvolvimento da autonomia cognitiva dos estudantes**"**.

2. A preparação das aulas do cálculo de integrais de funções racionais

Nesta fase da estratégia metodológica utilizada no cálculo de integrais de funções racionais, o professor deve ter em atenção o nível de seus alunos com o propósito de evitar riscos em não reterem absolutamente nada no fim de cada aula. Como afirma (Libâneo, 1994, p. 177), "a aula é o conjunto dos meios e condições pelos quais o professor dirige e estimula o processo de ensino em função da actividade própria do aluno no processo de aprendizagem escolar, ou seja, a assimilação consciente e activa dos conteúdos". Segundo (Miranda & Echevarría, 2019, p. 54) "uma aula tem como objectivo assimilação dos conhecimentos necessários por parte dos alunos para que possam utilizá-los na resolução de problemas profissionais[...]". Ainda para (Libâneo, 1994, p. 178), "a aula é toda situação didáctica[2] na qual se expõem objectivos, conhecimentos, problemas, desafios, com fins instrutivos e formativos, que incitam as crianças e jovens a aprender". Para ele,

[2] É um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objectos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...] de conhecimentos pertinentes. Brousseau (1986) apud (Neto & Coan, 2012, p. 47).

tendo em conta com as finalidades, princípio, elementos construtivos e meios de educação escolar, uma aula deve cumprir as seguintes exigências: ampliação do nível cultural e científico dos alunos, assegurando profundidade e solidez aos conhecimentos assimilados; formação de habilidades e hábitos, atitudes e convicções, que permitam desenvolver sua independência de pensamento, a criatividade e gosto pelo estudo; desenvolvimento das possibilidades de aproveitamento escolar de todos os alunos, diferenciando e individualizando as atividades propostas para atingir níveis relativamente homogêneos de assimilação da matéria. Por isso, é "através de uma planificação adequada da aula, que o professor proporciona mais situações educativas aos alunos[…]".(Alberto, 2017, p. 34). Ainda para este autor:

> O bom professor é o que consegue, enquanto fala, trazer o aluno até à intimidade do movimento do seu pensamento. Sua aula é, assim, um desafio e não uma cantiga de ninar. Seus alunos cansam, e não dormem. Cansam, porque acompanham as idas e vindas do seu pensamento, surpreendem suas pausas, suas dúvidas, suas incertezas. (Alberto, 2017, p.74).

Tendo em conta esses aspectos que se deve ter em consideração numa aula preparada pelo professor, (Brun, 1996, p. 49) diz que "a concepção moderna do ensino solicita, pois, ao professor que provoque no aluno as adaptações desejadas, através de uma escolha judiciosa dos problemas que lhe propõe".

Por isso, o professor durante a preparação das aulas deve saber o tipo que será necessário de modo que os seus alunos corroboram com os diferentes momentos que ela exigir. Isto é, o professor pode preparar uma aula de exposição dialogada onde abordará os elementos teóricos e os procedimentos a utilizar sem esquecer de dar aos alunos a tabela de integrais de algumas funções (racionais inteiras e trigonométricas), de modo que eles tenham já noções de como trabalhar com estes elementos na aula de exercitação e resolver os possíveis casos que o conteúdo terá. Depois o professor poderá fazer a preparação duma aula de exercitação onde vai limitar-se em propor atividades e pedir para os alunos irem ao quadro onde cada um apresente sua resolução para os demais, de modo que se efective o método de trabalho independente.

3. Determinação dos objectivos para o ensino do cálculo de integrais de funções racionais.

Para esta fase, o professor tem de saber realmente o que é que seus alunos poderão alcançar no fim de cada aula de cálculo de integrais de funções racionais. Como confirma (Haydt, 2006, p. 113), "a formulação de objectivos de ensino consiste na definição de todos os comportamentos que podem modificar-se como resultado da aprendizagem". Ainda para este autor:

> A selecção de objectivos é, em si, uma actividade que retira o professor da condição de um tarefeiro alienado e o coloca no papel de definidor de uma realidade que ele mesmo constroi, dentro dos limites de sua sala de aula e cujos reflexos, para a realidade externa, serão garantidos através de cada um dos seus alunos. (Haydt, 2006, p. 123)

Nesta perspectiva, os autores (Miranda & Echevarría, 2019, p. 36) relatam que:

> Os objectivos do processo de ensino e aprendizagem constituem os fins ou propósitos previamente concebidos que guiam a actividade dos professores e alunos de modo a que estes alcancem as transformações necessárias, de acordo com os interesses e carências da sociedade.

Por isso numa aula de cálculo, o professor deve ter em conta os objectivos que serão alcançados. Deve formulá-los bem de modo que seus alunos consigam atingir o nível desejado por ele, tendo como foco as necessidades dos mesmos e o seu contexto, isto é o meio em que estão inseridos.

4. O uso dos meios de ensino para o cálculo de integrais de funções racionais.

O Professor nesta fase da estratégia metodológica deve saber que os meios de ensino são todos os materiais que ele mesmo e seus alunos vão utilizar no decorrer duma determinada aula. Como diz (Libâneo, 1994, p. 173), "por meio de ensino designamos todos os meios e recursos materiais utilizados pelo professor e pelos alunos para a organização e condução metódica do processo de ensino e aprendizagem".

Na visão dos autores (Miranda & Echevarría, 2019, p. 51):

> Os meios são os objectos usados no processo de ensino e prendizagem para que os estudantes possam, de uma maneira mais eficiente e eficaz, apropriar-se do conteúdo e atingir o objectivo. Eles constituem o suporte material dos

> métodos de ensino e de aprendizagem. Servem de instrumentos operacionais, de fonte de actividades e são geradores de actos comunicativos.

Assim, tendo em conta o contexto, isto é, as condições que se verifica no Instituto Superior de Ciências de Educação, para as aulas do cálculo de integrais de funções, o professor deve utilizar, entre outros recursos didáticos, o livro didáctico, o quadro (preto ou branco), o giz ou marcador, o apagador e as tabelas de integração de algumas funções (polinomiais e trigonométricas) caso for necessário quando numa resolução cair em integrais do arco tangente.

5. O uso do princípio de acessibilidade para o ensino do cálculo de integrais de funções racionais

A acessibilidade duma maneira mais específica, no ensino do cálculo de integrais de funções racionais, significa o acesso de todos os alunos compreenderem as técnicas de integrais que o professor vai ensinando durante uma aula. Sendo assim, segundo (Moraes, 2007, p. 25), "acessibilidade é a facilidade com que qualquer indivíduo ou grupo de pessoas podem alcançar um objectivo ou grupo de objectivos". Para o autor (Libâneo, 1994, p. 144), "acessibilidade significa compatibilizar os conteúdos com o nível de preparo e desenvolvimento mental dos alunos. É o que se costuma denominar, também, de dosagem dos conteúdos".

Corroborando com Libâneo, pode-se afirmar que, para que os alunos compreendam as aulas do cálculo de integrais de funções racionais[3], é preciso que o professor dosifique este conteúdo começando em: funções racionais onde o professor poderá tratar os dois aspectos essenciais, isto é, quando é que são ditas impróprias ou próprias, decomposição de funções racionais em elementos simples, primitiva e integrais indefinidas e finalmente falar de integrais de funções racionais.

Para integrar uma função racional imprópria apoia-se em (Almeida & Simões, 2014, p. 92) que dizem:

---

[3] É uma função do tipo $\frac{A(x)}{B(x)}$ onde $A(x)$ e $B(x)$ são dois polinómios quaisquer, com $B(x) \neq 0$. (Almeida & Simões, 2014, p. 91).

> Se o grau do polinómio $A(x)$ é maior ou igual do que o grau do polinómio $B(x)$, começamos por efectuar a divisão inteira dos polinómios, determinando o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ dessa divisão; como $A(x) = Q(x) \times B(x) + R(x)$ então $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$ e obtém-se $\int \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{B(x)} dx$.

Para integrar uma função racional própria, recorre-se ao método das fracções parciais como diz os autores (Batista et al., 2012, p. 120):

> O método das fracções parciais consiste em escrever a função como soma de fracções mais simples. Se $f(x)$ é própria, então devemos escrever a função como soma de fracções parciais mais simples (um resultado da álgebra garante que sempre é possível fazer isso), e a partir desta soma encontramos a integral da função $f(x)$.

O professor para elucidar esta prática, procura basear-se nos casos escritos pelo autor (Pinto, 2009, p. 86-87) que salienta:

1. Se $(x-r)$ é um factor de $Q(x)$, então uma das parcelas será da forma $\frac{A}{x-r}$;
2. Se $(x-r)^n$ é um factor de $Q(x)$, então as parcelas correspondentes serão da forma $\frac{A}{x-r} + \frac{A}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A}{(x-r)^n}$;
3. Se $(ax^2 + bx + c)$, com discriminante negativo, é factor de $Q(x)$, então uma das parcelas será $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$;
4. Se $(ax^2 + bx + c)^n$, com discriminante negativo, é factor de $Q(x)$, então uma das parcelas será $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$.

Para o tratamento das integrais de funções racionais que contêm trinómio quadrático, apoia-se ao autor (Demidovitch, 1993, p. 121), que diz, para se resolver este tipo de integral, o professor precisa analisar o seguinte:

> Se $A = 0$, então busca-se o complemento quadrático para se reduz o trinómio do 2º grau, obtendo assim as integrais imediatas, isto é, caindo na integral I_1;Se $A \neq 0$, então deve-se fazer a parecer no numerador a derivada do denominador e aplicar as técnicas de integração.

Requere-se que o professor aqui assuma o seu papel e mostre atitude e simplicidade, de modo que seus alunos entendam as etapas em que vão percorrendo durante a resolução do exercício. Conforme diz (Matos & Serrazina, 1996, p. 171) "a atitude do professor é crucial para o desenvolvimento de uma atmosfera na aula onde os alunos partilhem os seus pensamentos matemáticos, comunicando activamente entre si e com o professor". Assim, cabe ao professor ser o indivíduo responsável para que os alunos consigam entender as variadíssimas etapas que se passará no desenrolar de um determinado caso a tratar.

6. Necessidade do uso e aplicação de algoritmos no ensino do cálculo de integrais de funções racionais;

Quer-se defender nesta fase das estratégias metodológicas que o ensino do cálculo de integrais de funções racionais necessita do uso e aplicação de um certo algoritmo, porque é um recurso que ajuda na compreensão deste conteúdo. Tendo em conta essa ideia, (Matos & Serrazina, 1996, p. 45) afirmam que "o recurso a algoritmos é fundamental no raciocínio matemático [...] nos permitem uma economia de pensamento adaptando um conjunto de procedimentos-tipo a situações problemáticas". Ainda (Santos, 2015, pp. 19-25) reforça que "na Matemática, o algoritmo é todo conjunto de regras e operações para fazer cálculos, realizar tarefas ou solucionar problemas. O uso de algoritmos no ensino da Matemática pode promover uma compreensão maior dos conteúdos [...]".

Por esta razão, defende-se que o processo de ensino e aprendizagem de resolução de integrais de funções racionais, seja baseado nos algoritmos que abaixo descreve-se.

Para calcular integrais de funções racionais impróprias, defende-se que o professor e seus alunos obedeçam os seguintes passos do algoritmo:

- ✓ Efectuar a divisão de polinómios pelo método de Chave e extrair o quociente e o resto.
- ✓ Fazer a substituição do quociente e do resto na expressão $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$.
- ✓ Aplicar o sinal de integração em ambos os membros da expressão obtida.
- ✓ Decompor e trocar de variável se for necessário. Caso contrário, este passo não existe.
- ✓ Achar a solução da integral.

RECH- Revista Ensino de Ciências e Humanidades – Cidadania, Diversidade e Bem Estar. **ISSN 2594-8806**

Exemplo: Calcule as seguintes integrais $\int \frac{x^3-x^2+1}{x^2+1}dx$

Resolução: aplicando os passos apresentados e defendindos, tem-se:

- ✓ Efectuando a divisão de polinómios pelo método de Chave e extrair o quociente e o resto.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & +0x & +1 & x^2+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & & -x & & x-1 \\ \cline{1-4}
 & -x^2 & -x & +1 & \\
 & +x^2 & & +1 & \\ \cline{2-4}
 & & -x & +2 &
\end{array}
$$

Onde: $Q(x) = x - 1$ e $R(x) = -x + 2$

- ✓ Fazendo a substituição do quociente e do resto na expressão $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} \Leftrightarrow \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1} = x - 1 - \frac{x - 2}{x^2 + 1}$$

- ✓ Aplicando o sinal de integração em ambos os membros da expressão obtida.

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}dx = \int (x-1)dx - \int \frac{x-2}{x^2+1}dx$$

- ✓ Decompondo a expressão obtida e fazendo mudança de variável onde for necessário.

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}dx = \int xdx - \int dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx + 2\int \frac{dx}{x^2+1}$$

Mudando de variável na terceira integral do segundo membro, tem-se:

$x^2 + 1 = u,\ 2xdx = du \Leftrightarrow xdx = \frac{du}{2}$. Substituindo, obtém-se:

RECH- Revista Ensino de Ciências e Humanidades – Cidadania, Diversidade e Bem Estar. **ISSN 2594-8806**

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \int x dx - \int dx - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + 2\int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

- ✓ Achar a solução da integral.

$\int \frac{x^3-x^2+1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} ln|u| + 2arctgx + C$ Como $u = x^2 + 1$, então tem-se:

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} ln|x^2 + 1| + 2arctgx + C$$

Ao calcular integrais de funções racionais aplicando as fracções parciais, o professor deve orientar os seus alunos para que considerem os casos salientados pelo autor Pinto (2009) e que coloquem também em acção os seguintes passos do algoritmo:

- ✓ Factorizar se for possível o denominador e decompor em fracções parciais.
- ✓ Eliminar os denominadores, multiplicando ambos os membros da equação pelo denominador comum.
- ✓ Operar o lado direito, agrupando os termos semelhantes e pôr em evidência o factor repetido.
- ✓ Formar por identidade, um sistema de equações.
- ✓ Resolver o sistema de equação formado, aplicando qualquer método de resolução para determinar as constantes.
- ✓ Fazer a substituição dos valores das constantes obtidas.
- ✓ Integrar a equação obtida após a substituição das constantes.

Exemplo: Calcule a integral $\int \frac{dx}{x^2+2x}$

Resolução: Aplicando os passos do algoritmo, apresentados e defendidos, tem-se.

- ✓ Factorizando o denominador e decompondo-o em fracções parciais, obtém-se:

$$x^2 + 2x = x(x + 2) \Longrightarrow \frac{1}{x(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2}$$

- ✓ Eliminando os denominadores, multiplicando ambos os membros da equação pelo denominador comum, tem-se:

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1 \times x(x+2)}{x(x+2)} = \frac{[A(x+2)+Bx]x(x+2)}{x(x+2)}$$

$$1 = A(x+2) + Bx$$

- ✓ Operando o lado direito, agrupando os termos semelhantes e pôr em evidência o factor repetido.

$$1 = A(x+2) + Bx \Leftrightarrow 1 = Ax + 2A + Bx \Leftrightarrow 1 = (A+B)x + 2A$$

- ✓ Formando por identidade, um sistema de equações, obtém-se:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A \quad = 1 \end{cases}$$

- ✓ Resolvendo o sistema de equação formado, aplicando o método de substituição obtém-se as constantes:

$A = {}^{1}/_{2}$ e $B = -{}^{1}/_{2}$

- ✓ Fazendo a substituição dos valores das constantes obtidas, tem-se:

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+2)}$$

- ✓ Integrando a equação obtida após a substituição das constantes.

$$\int \frac{dx}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}dx \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x(x+2)} = \frac{1}{2}ln|x| - \frac{1}{2}ln|x+2| + C$$

Portanto, $\int \frac{dx}{x^2+2x} = \frac{1}{2}ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$

Na execução desses passos, chama-se atenção aos professores que devem dizer aos seus alunos que a factorização só é possível quando o denominador não se encontra na forma de produto de factores. Caso contrário, não se realiza a factorização. Se o professor não chamar atenção aos alunos, então será possível que eles apresentem dificuldades que os levarão a cometerem erros de cálculos.

Quando se trata de integrais de funções racionais que contêm o trinómio quadrático, para o seu cálculo é necessário que se aplique os seguintes passos do algoritmo:

- ✓ Fazer aparecer no numerador, a derivada do denominador, se $A \neq 0$; se $A = 0$, então este passo do algoritmo não existe.
- ✓ Redigir o trinómio a forma $ax^2 + bx + c = a(x + k)^2 + c$, se $a \neq 1$.
- ✓ Separar o quadrado perfeito do trinómio quadrado, utilizando artifício de cálculo (técnica do completamento do quadrado)

  $x^2 \pm px + q = x^2 \pm 2\left(\frac{p}{2}\right)x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$.
- ✓ Achar o resultado final da integral aplicando a fórmula $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$.

Exemplo: Calcule a integral $\int \frac{x-1}{x^2-4x+8} dx$

Resolução: Como $A \neq 0$, então o primeiro passo do algoritmo apresentado existe.

- ✓ Fazer aparecer no numerador, a derivada do denominador.

Como $(x^2 - 4x + 8)' = 2x - 4$, então obtém-se:

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x+8} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)+4-4}{x^2-4x+8} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+4-4}{x^2-4x+8} dx$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x+8} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8} dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2-4x+8} dx$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x+8} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8} dx + \int \frac{dx}{x^2-4x+8}$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x+8} dx = \frac{1}{2} ln|x^2-4x+8| + \int \frac{dx}{x^2-4x+8}$$

Aqui o professor deve analisar o seguinte: como a última integral $A = 0$ e $a = 1$, então aplica-se imediatamente o terceiro passo.

- ✓ Separando o quadrado perfeito do trinómio quadrado, utilizando artifício de cálculo (técnica do completamento do quadrado), obtém-se:

$x^2 - 4x + 8 = x^2 - 2(2)x + (2)^2 - (2)^2 + 8 = (x^2 - 4x + 4) + (8 - 4) = (x - 2)^2 + 4$. Assim:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 4} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + (2)^2}$$

- ✓ Achando o resultado final da integral aplicando a fórmula $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$, tem-se:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2 + (2)^2} = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

Portanto, $\int \frac{x-1}{x^2-4x+8} dx = \frac{1}{2} ln|x^2 - 4x + 8| + \frac{1}{2} arctg\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$

7. O princípio do vínculo teórico prático no ensino do cálculo de integrais de funções racionais.

Relacionar a teoria com a prática, significa organizar os fundamentos teóricos que hão-de sustentar a prática. Por isso, falar do princípio do vínculo teórico prático no ensino do cálculo de integrais de funções racionais, significa orientar o professor a seleccionar toda a teoria relacionada com o cálculo e que servirá como alcerce ao fazer a prática destas integrais. Requer-se aqui, que o professor consiga interpretar tudo quanto a teoria diz na prática. Tal como afirmam (Lisboa & Lucino, 2015, p. 30):

> [...] para se obter um ensino de qualidade é necessário relacionar a teoria e a prática, por isso os professores devem capacitar-se para obter êxitos na formação profissional. [...] a metodologia de ensino do professor deve ter relação entre a teoria e prática para melhor compreensão por parte dos alunos, de modo que eles entendam o porquê estudar aquele conteúdo, que faça sentido

e tornando-o significativo, proporcionando o espaço para o diálogo que é de extrema importância no processo de ensino e aprendizagem.

Numa aula do cálculo de integrais de funções racionais, o professor deve analisar durante a exercitação, quais são os elementos teóricos necessários a implementar de modo que os alunos possam compreender o conteúdo que está a ser abordado. Então, aqueles conteúdos teóricos que serão necessários ou aplicáveis num determinado exercício, constituirão os fundamentos teóricos que vão assegurar a prática. Daí, estabelece-se a relação entre teoria e a prática. Como diz (Libâneo, 1994, p. 182) "aqui o empenho do professor está em estimular o raciocínio dos alunos, instigá-los a emitir opiniões próprias sobre o que aprenderam, fazê-los ligar os conteúdos a coisas ou eventos do quotidiano".

Com base em nossa experiência com a abordagem desse conteúdo com os alunos, acreditamos que esta estratégia metodológica vai ajudar o professor em saber detalhar numa aula de exercitação ou aula prática, a realizar um estudo aprofundado da teoria que será usada, pois, sem a teoria não há prática.

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Num universo de 115 alunos dos primeiros anos do Ensino de Matemática e Física do Instituto Superior de Ciências de Educação do Uíge durante o ano 2019, foram seleccionados 89 estudantes de ambos os sexos, baseados num nível de confiança de 95% para se efectivar os objectivos desta pesquisa em que o erro máximo admitido foi de 5% e o valor crítico foi de 1,96. A escolha da referida amostra foi feita por meio da amostragem aleatória simples.

Usou-se a fórmula para o cálculo do tamanho em população finita conforme (Luchesa & Neto, 2011, p. 24) com base na estimativa da proporção populacional, para seleccionarmos a amostra:

$$n = \frac{N.Z^2.p(1-p)}{(N-1).\alpha^2 + Z^2.p(1-p)} = \frac{N.Z^2.p.q}{(N-1).\alpha^2 + Z^2.p.q}$$

Para dar prosseguimento à pesquisa, foram utilizados os seguintes instrumentos: observação, entrevista e inquérito.

Com o objectivo de detectar as dificuldades que os alunos apresentavam acerca do objecto de estudo desta pesquisa, aplicou-se o teste diagnóstico cujos resultados estão apresentados na tabela abaixo:

Tabela 1: Resultados do primeiro teste

	RESPOSTAS				
	CERTAS		ERRADAS		
QUESTÕES	**Nº**	**%**	**Nº**	**%**	**TOTAL**
Q1	30	34	59	66	89
Q2	12	13	77	87	89
Q3	10	11	79	89	89
Q4	07	08	82	92	89
Q5	05	06	84	94	89

Fonte: Dados da pesquisa

Assim, vendo a tabela, consegue-se notar que em todas as perguntas o número de respostas certas é inferior em relação ao número de respostas incorrectas, ou seja, a maioria dos alunos testados tinha dificuldades em responder as questões, facto esse que motivou-nos em dar o segundo teste após cinco aulas dadas nas respectivas turmas.

Sabe-se que o pós-teste aplicado teve como finalidade verificar se os alunos conseguiram compreender o que foi abordado ao longo do trabalho com eles na sala de aula, dando aulas e apresentando os algoritmos para o cálculo deste tipo de integrais. E com base a isso, apresentou-se a tabela dos dados obtidos pelos alunos.

Tabela 2: Resultados do segundo teste

	RESPOSTAS				
	CERTAS		ERRADAS		
QUESTÕES	**Nº**	**%**	**Nº**	**%**	**TOTAL**
Q1	86	97	03	03	89
Q2	82	92	07	08	89
Q3	80	90	09	10	89
Q4	83	93	06	07	89
Q5	79	89	10	11	89

Fonte: Dados da pesquisa

Assim, vendo a tabela do segundo teste, observa-se que houve sucesso em termos de positividade, porque em todas as perguntas o número de respostas certas é superior em

RECH- Revista Ensino de Ciências e Humanidades – Cidadania, Diversidade e Bem Estar. **ISSN 2594-8806**

relação ao número de respostas erradas, o que mostra a eficácia das estratégias metodológicas que se sustenta num algoritmo apresentadas e que se trabalhou com os mesmos alunos para que houvesse melhorias significativas em termos de evolução de aprendizagem.

Comprovação Estatística da Hipótese

O esboço teórico deste artigo está sustentado com uma possível solução ao problema constatado, isto é, a hipótese desta pesquisa. Diante disso, procurou-se cumprir a referida hipótese de investigação por intermédio do Teste de Student para amostra pareada com um nível de significância ou margem de erro $\alpha = 5\% = 0.05$. Com efeito, necessitou-se cumprir os seguintes critérios:

1. Declaração das hipóteses

- ✓ ***Hipótese nula*** **$(H0)$[4]:** " não existe diferença significativa entre as médias das respostas certas obtidas pelos alunos no pré-teste e pós-teste", portanto $\mu_x = \mu_y$.
- ✓ ***Hipótese alternativa*** **$(H1)$[5]:** " existe diferença significativa entre as médias das respostas certas obtidas pelos alunos no pré-teste e pós-teste", logo $\mu_x \neq \mu_y$.

2. Tabela das respostas certas do pré-teste e pós-teste

Considerando as respostas certas do primeiro e do segundo testes respectivamente, tem-se:

[4] São, de certo modo, o inverso das hipóteses de investigação. Também constituem proposições a cerca das relações entre variáveis, mas servem para refutar ou negar o que afirma a hipótese de investigação. (RAMOS & NARANJO, 2013, p. 91).
[5] São possíveis "alternativas" perante as hipóteses de investigação e nula: oferecem uma descrição ou explicação diferente das que proporcionam estes tipos de hipóteses. (Ramos & Naranjo, 2013, p. 91)

Tabela 3: Respostas certas do primeiro e segundo teste aplicado

QUESTÕES	RESPOSTAS CERTAS		DESVIOS	QUADRADO DOS DESVIOS
	PRÉ-TESTE xi	PÓS-TESTE yi	$di = yi - xi$	di^2
Q1	30	86	56	3136
Q2	12	82	70	4900
Q3	10	80	70	4900
Q4	07	83	76	5776
Q5	05	79	74	5476
SOMA	$\sum xi = 64$	$\sum yi = 410$	$\sum di = 346$	$\sum di^2 = 24188$
MÉDIA	$\mu_x = 12.8$	$\mu_y = 82$	$\mu_{di} = 69.2$	

Fonte: Dados da pesquisa

3. Desvio padrão amostral

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum di^2 - \left[{(\sum di)^2}/{n}\right]}{n-1}} = \sqrt{\frac{24188 - \left[{(346)^2}/{5}\right]}{5-1}} = \sqrt{\frac{24188 - {119716}/{5}}{4}}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{24188 - 23943.2}{4}} = \sqrt{\frac{244.8}{4}} = \sqrt{61.2} = 7.82 \Leftrightarrow S_d \approx 7.82$$

4. Cálculo de t

$$t_{cal} = \frac{\mu_{di}}{{S_d}/{\sqrt{n}}} = \frac{69.2}{{7.82}/{\sqrt{5}}} = \frac{69.2}{3.49} = 19.83 \Leftrightarrow t_{cal} = 19.83$$

5. Graus de liberdade

$$df = n - 1 = 5 - 1 = 4 \Leftrightarrow df = 4$$

6. Identificação do $t_{crít}$

Por intermédio da tabela que se encontra em anexo e, considerando o graus de liberdade $(df = 4)$ e o nível de significância ou a margem de erro escolhido, $\alpha = 5\% = 0.05$, os valores críticos de t de Student são: -2.7765 e $+2.7765$, achados na intersecção da alínea que corresponde com $df = 4$ e pela coluna do $\alpha = 0.05$ como mostra a tabela Seuil de Risque alpha (bilatéral).

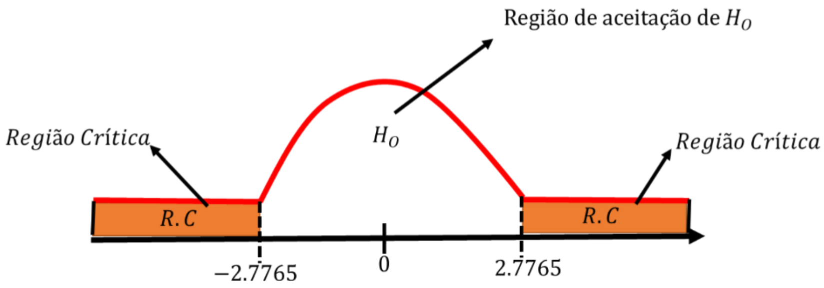

Figura 1:Aceitação e rejeição da hipótese nula da pesquisa

Dos cálculos realizados acima, notou-se claramente que o valor calculado do teste t de Student (t_{cal}), é maior do que o valor crítico de t vindo da tabela $(t_{crít})$, isto é, $(t_{cal} > t_{crít})$ com um risco de 5%. Com estes resultados, rejeitou-se a hipótese nula $\left(H_0 : \mu_x = \mu_y\right)$ e aceitou-se a hipótese alternativa $\left(H_1 : \mu_x \neq \mu_y\right)$ e o parecer da comparação é que existe diferença entre as médias aritméticas das respostas certas do pré-teste e do pós-teste aplicados.

Assim, com esta observação comparativa feita, concluiu-se que a estratégia metodológica adequada que se sustenta num algoritmo foi útil para o ensino do cálculo de integrais de funções racionais na experimentação realizada em sala de aula com essa turma de alunos. Além disso, a média das respostas certas do pós-teste se enquadrada ao nível de significância da proposta pelo tamanho da amostra usado e que a positividade alcançada no pós-teste é mais eficiente em relação a do pré-teste, o que comprova a validade da hipótese da pesquisa.

CONCLUSÃO

O cálculo de integração de funções racionais é um dos assuntos que os alunos da opção do Ensino de Matemática e Física do Instituto Superior de Ciências de Educação do Uíge têm vindo apresentar muitas dificuldades. Notou-se durante a aplicação do pré- teste, assim como ao longo do trabalho realizado com eles nas respectivas salas de aula, muitas dificuldades em como efectuar o cálculo de uma integral de função racional sobretudo quando a função racional é própria. A partir das dificuldades que os alunos foram apresentando, chegou-se às seguintes conclusões:

- A dificuldade em utilizar uma estratégia de ensino adequada está na base dos resultados insatisfatórios obtidos pelos alunos no cálculo de integrais de funções racionais. Verificou-se uma diferença significativa nos resultados obtidos pelos alunos na realização do pré e pós-testes, após a aplicação da estratégia metodológica que se sustenta num algoritmo;
- O conhecimento insuficiente dos conteúdos ministrados no ensino geral, pode estar na base do fracasso e da existência das dificuldades apresentadas pelos alunos do I ano do Ensino de Matemática e Física do Instituto Superior de Ciências de Educação do Uíge. Após a realização do pós-teste, notou-se uma evolução significativa em termos de minimização das dificuldades que os alunos apresentavam;
- A não abordagem desta matéria de uma forma ordenada ou sistemática, e o baixo envolvimento dos alunos em estudo individual e em grupo, são motivos que levam os alunos do I ano das opções do ensino de Matemática e Física ao fraco aproveitamento deste conteúdo em estudo;
- Os resultados obtidos no pós-teste são melhores em relação aos do pré-teste, conforme se pode observar nas tabelas e permitiram tomar conhecimento sobre a eficácia da estratégia metodológica que se sustenta num algoritmo aqui apresentada nesta pesquisa;
- Os alunos se empenharam muito, aplicando os passos apresentados, mostrando interesse e se envolviam constantemente para evitar as dificuldades e insuficiências que apresentaram inicialmente no teste diagnóstico (pré-teste).

Neste sentido, espera-se que este artigo possa vir a contribuir significativamente, fornecendo subsídios para a superação das dificuldades que muitos alunos, até mesmo alguns professores, apresentam no cálculo de integrais de funções racionais.

Referências Bibliográficas

1. Alberto, N. M. (2017). *Didáctica: Planificação e Gestão de Aula.* Luanda: ECO7-Investimentos, Ltda.
2. Almeida, R., & Simões, R. (2014). *Primitivas.* Lisboa: ESCOLAR.
3. Angola, A. N. (2016). Diário da República de Angola: Órgão oficial da República de Angola. *Lei de Base do Sistema de Educação e Ensino nº 17 de 07 de Outubro de 2016, I Série-Nº 170*, pp. 3994-4002.
4. Batista, E., Toma, E. Z., Fernandes, M. R., & Janesch, S. M. (2012). *Cálculo II* (2ª ed.). Florianópolis.
5. Brun, J. (1996). *Didáctica das Matemáticas.* LISBOA: HORIZONTES PEDAGÓGICOS.
6. Demidovitch, B. (1993). *Problemas e Exercícios de Análise Matemática.* Lisboa: Escolar.
7. Doretto, T. M. (2014). *Análise do Livro Didático de Cálculo Diferencial e Integral a partir da Teoria da Alan J. Bishop.* São Paulo: IFSP.
8. Haydt, R. C. (2006). *Curso de Didática Geral* (8ª ed.). São Paulo: ática.
9. Libâneo, J. C. (1994). *Didática.* São Paulo: Cortez.
10. Lisboa, J. M., & Lucino, M. A. (2015). *A Importância da Teoria e Prática nas Aulas de Matemática.* Ivaiporã.
11. López, J. S. (2004). *Estratégias Metodológicas Y Técnicas Para la Investigación Social (J. J. M. Salermo Trad).* México.
12. Luchesa, C. J., & Neto, A. C. (2011). *Cálculo do tamanho da amostra nas pesquisas em Administração.* Curitiba: Unicuritiba.
13. Matos, J. M., & Serrazina, M. d. (1996). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.
14. Miranda, F. S., & Echevarría, H. R. (2019). *Aplicação da Didáctica no Ensino Superior: Recomendações úteis* (2ª ed.). (A. Isabel, Ed.) Luanda: Mayamba,Lda.
15. Neto, J. R., & Coan, L. G. (2012). *Fundamentos da Didáctica das Ciências e da Matemática* (2ª ed.). Florianópolis: Publicações do IF-SC.
16. Pinto, M. M. (2009). *Introdução ao Cálculo Integral*. Belo Horizonte: UFMG.
17. Ramos, S. T., & Naranjo, E. S. (2013). *Metodologia da Investigação Científica.* Luanda: Escolar.

18. Santos, D. T. (2015). *O uso de Algoritmos e Programação no ensino de Matemática.* S. Paulo.

Recebido: 30/11/2020. Aceito: 20/4/2021.

Autores:

Venâncio Sebastião Finda - Mestrando, Instituto Superior de Ciências da Educação do Sumbe, Cuanza Sul, ISCED. SUMBE, Angola.
E-mail: venanciosebastiaofinda@gmail.com

José Luiz Magalhães de Freitas - Orientador Científico, Professor do MECMAT – UNIDERP e do PPGEduMat-UFMS
E-mail: joseluizufms2@gmail.com