REVISTA ENSINO DE CIÊNCIAS E HUMANIDADES

UFAM

RECH- Revista Ensino de Ciências e Humanidades – Cidadania, Diversidade e Bem Estar. **ISSN 2594-8806**

Vol 9, Núm 1, jan-jun, 2025, pág. 562-580

ÂNGULO ENTRE DOIS VECTORES NA 10.ª CLASSE

ANGLE BETWEEN TWO VECTORS IN 10TH CLASS

Alberto Maneco Camilo, betocamilobc1@gmail.com

António Romeu Sardinha Rede, arsrede@gmail.com

RESUMO

O estudo dos ângulos entre dois vectores é fundamental em diversas áreas da Matemática e suas aplicações. Através do produto escalar é possível determinar o ângulo entre dois vectores, uma operação que auxilia na compreensão das relações geométricas em diferentes dimensões. Este trabalho apresenta no decorrer do texto, uma revisão teórica e metodológica sobre a temática, resultante da observação de uma aula na 10.ª classe do Instituto Politécnico do Sumbe, na Província do Cuanza Sul, em Angola, no Ano lectivo 2023/2024. A aula foi transmitida com uma certa insegurança, devido a falta de preparação didáctico-pedagógica consubstanciada na não utilização dos recursos didácticos disponíveis. O objectivo desse estudo é aprofundar a prática do cálculo do ângulo entre dois vectores por meio de uma metodologia de estudo do tipo qualitativa, com enfoque descritivo. Espera-se mediante uma revisão bibliográfica, melhorar as aplicações desse conceito em áreas práticas como física, engenharia e computação gráfica.

Palavras-chave: Ângulos. Geometria plana. Vectores.

ABSTRACT

The study of angles between two vectors is fundamental in several areas of Mathematics and its applications. Through the scalar product it is possible to determine the angle between two vectors, an operation that helps in the understanding of geometric relationships in different dimensions. This work presents, in the course of the text, a theoretical and methodological review on the subject, resulting from the observation of a class in the 10th grade of the Polytechnic Institute of Sumbe, in the Province of Cuanza Sul, in Angola, in the academic year 2023/2024. The class was transmitted with a certain insecurity, due to the lack of didactic-pedagogical preparation embodied in the non-use of available teaching resources. The objective of this study is to deepen the practice of calculating the angle between two vectors through a qualitative study methodology, with a descriptive focus. It is expected, through a bibliographic review, to improve the applications of this concept in practical areas such as physics, engineering and computer graphics.

Keywords: Angles. Plane geometry. Vectors.

INTRODUÇÃO

O conceito de ângulo entre dois vectores é essencial para a análise de problemas geométricos e físicos, sendo utilizado amplamente em áreas que vão desde a Mecânica Clássica até a Álgebra Linear. Na Matemática, o ângulo entre dois vectores pode ser definido utilizando o produto escalar, uma operação que permite calcular a projecção de um vector sobre o outro e, assim, determinar o ângulo formado entre eles.

Segundo Lima e Lobo (2017), a fórmula para o cálculo do ângulo entre dois vectores, dada pelo produto escalar $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre os vectores u e v, é uma das ferramentas mais poderosas para o estudo de direcções e magnitudes no espaço euclidiano. A partir desta equação, pode-se isolar o cosseno do ângulo e, consequentemente, calcular θ em qualquer dimensão do espaço vectorial.

Além das suas aplicações teóricas, o cálculo do ângulo entre dois vectores tem implicações práticas, especialmente em computação gráfica, onde é utilizado na manipulação de imagens e objetos em 3D e, na física, para a resolução de problemas de forças e movimentos (Silva & Martins, 2018). No entanto, a compreensão deste conceito ainda apresenta desafios no ensino da Matemática, o que motiva estudos adicionais sobre a didáctica envolvida na transmissão desses conhecimentos aos alunos.

Tem sido uma realidade, os alunos da 10.ª classe do Instituto Politécnico do Sumbe, a incompreensão na dedução da fórmula para determinar o cosseno do ângulo formado por dois vectores, bem como a falta de habilidades no manuseio de ferramentas didácticas para a construção do gráfico. Depois de observada a aula e, para a sua melhoria propomos as seguintes perguntas científicas:

1. Como podemos determinar com mais facilidade o ângulo de dois vectores num espaço bidimensional utilizando o produto escalar?
2. Quais são as implicações desse ângulo nas propriedades geométricas e Físicas dos vectores?

O objecto de estudo é o processo de ensino-aprendizagem de ângulos entre dois vectores e o campo de acção é o tratamento de vectores no plano na 10.ª classe.

O objectivo geral é desenvolver boas práticas para o ensino-aprendizagem do cálculo do ângulo entre dois vectores na 10.ª classe do Instituto Politécnico do Sumbe.

1. BREVE HISTORIAL SOBRE ÂNGULO ENTRE DOIS VECTORES

O conceito de ângulos entre dois vectores, assim como outros conceitos fundamentais da Álgebra Vectorial, foram desenvolvidos ao longo dos séculos, com contribuição de vários autores. O sistema de coordenadas catesianas no sec XVII, foi crucial para o desenvolvimento posterior da análise de vectores. O sistema de coordenadas permitiu a representação de vectores em um espaço de vectores geométricos facilitando o estudo do angulo entre dois vectores. Em meados do século XIX, começou a busca por métodos mais simples, que permitisse obter informações geométricas a partir de equações algébricas, e obter as equações algébricas de conceitos geométricos, de uma forma mais directa. Para isso foi fundamental o desenvolvimento da noção de vetor. René Descartes (1596-1650).

O produto escalar foi desenvolvido no contexto da geometria analítica e do cálculo vectorial, destacando-se em trabalhos de matemáticos como William Rowan Hamilton e Hermann Grassmann. Em 1844, Grassmann introduziu a ideia de multiplicação entre vectores, que mais tarde se consolidou no conceito moderno de produto interno, facilitando o cálculo de ângulos entre dois vectores em espaços bidimensionais e tridimensionais (Strang, 2003).

Este conceito é amplamente utilizado em diversas áreas como física, engenharia e computação gráfica. Em física, o ângulo entre vectores é crucial para descrever fenômenos como a força e a direcção do movimento, enquanto na computação gráfica é essencial para o processamento e modelagem de imagens em 3D (Anton & Rorres, 2014).

Segundo Winterle & Steinbruch (2000, p. 114,115), chama-se ângulo de duas retas r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2. Logo, sendo θ este ângulo, tem-se: $\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.

2. O ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

As dificuldades que os alunos apresentam no processo de ensino e de aprendizagem de Matemática nas escolas do ensino secundário de Angola, são apontadas como de natureza sistemática e de falta de aperfeiçoamento dos conteúdos aprendidos nas classes anteriores. Todavia, embora não sejam ainda de domínio de muitos docentes, hoje está mais que confirmada que a situação formativa é tida como estratégia metodológica de ensino benéfica na organização didática da natureza construtivista dos ambientes de aprendizagem nas escolas, capazes de transformar os objetos do ensino em aprendizagens consolidadas. (Konga, 2023).

O ensino da Matemática em Angola ainda segue um modelo tradicional, onde o professor é a figura central e os alunos são vistos como receptores passivos do conhecimento. Esse modelo é caracterizado por uma ênfase na memorização e resolução de exercícios de maneira mecânica, com pouca ênfase no desenvolvimento do raciocínio crítico e na aplicação prática do conhecimento matemático no quotidiano dos alunos. Para uma maior eficácia, é necessário um ensino mais participativo e contextualizado, que permita aos alunos ver a Matemática como uma ferramenta útil e relevante para a resolução de problemas do mundo real (Gomes, 2019).

2.1. OBJECTIVOS DO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Os objectivos do ensino da Matemática em Angola, tal como preconizado na Lei de Base do Sistema de Educação e Ensino, são múltiplos e visam desenvolver nos alunos capacidades de raciocínio lógico, resolução de problemas, e a capacidade de aplicar conceitos matemáticos em diferentes situações. O desenvolvimento de habilidades Matemáticas é essencial para preparar os alunos para enfrentar os desafios do mercado de trabalho, bem como para uma participação activa e informada na sociedade (LBSEE, 2020).

Segundo Neto e Silva (2020), um dos principais objectivos do ensino da Matemática em Angola é garantir que os alunos adquiram uma base sólida de conhecimentos matemáticos, que lhes permita continuar os estudos em níveis mais avançados. Além disso, visa-se promover uma aprendizagem significativa, onde os alunos possam relacionar o conteúdo aprendido com a sua realidade e assim, desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

3. OS PRINCÍPIOS DIDÁCTICOS NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Os princípios didácticos são definidos por Klingberg (1978) como sendo os “aspectos gerais da estruturação do conteúdo organizactivo-metodológico do ensino, que se originam dos objectivos e das leis que os regem objetivamente” (p. 243).

O princípio de carácter científico estabelece que o ensino da Matemática deve ser baseado em fundamentos sólidos e teorias reconhecidas. Segundo Libâneo (1994), o conhecimento deve ser apresentado de forma sistemática e rigorosa, para que os alunos compreendam a lógica interna da Matemática e suas aplicações. Isso inclui a explicação clara de conceitos, teoremas e demonstrações, o ensino deve garantir que os conteúdos sejam transmitidos de forma sistemática, com base em teorias científicas e no rigor metodológico (Libâneo, 1994).

O princípio didáctico de vinculação da teoria com a prática defende que a Matemática deve ser ensinada de modo que os alunos consigam aplicar os conceitos teóricos em situações práticas. De acordo com Libâneo (1994), a vinculação da teoria com a prática é essencial para que os alunos percebam a utilidade da Matemática no seu dia a dia, em diferentes contextos. No ensino de vectores, por exemplo, ao aprender sobre ângulos entre vectores, é importante que os alunos apliquem esse conhecimento em problemas práticos de física ou engenharia. A vinculação da teoria com a prática é fundamental para que os alunos compreendam a aplicabilidade dos conceitos matemáticos na resolução de problemas do quotidiano (Libâneo, 1994).

O princípio didáctico da acessibilidade refere-se à necessidade de adaptar os conteúdos ao nível de compreensão dos alunos, respeitando o desenvolvimento cognitivo de cada um. Libâneo (1994) enfatiza que os conteúdos devem ser organizados de forma progressiva, de modo que os alunos adquiram novos conhecimentos com base no que já sabem, evitando sobrecarregar o aprendizado. A acessibilidade no ensino requer que os conteúdos sejam apresentados de acordo com o nível de compreensão dos alunos, respeitando o seu rítmo de aprendizagem (Libâneo, 1994).

O princípio didáctico de visualização sugere que o uso de recursos visuais, como gráficos, diagramas e outras representações, facilita a compreensão de conceitos matemáticos abstratos. Segundo Libâneo (1994), o recurso à visualização ajuda os alunos a estabelecerem conexões mais claras entre a teoria e a prática, sobretudo em áreas como Geometria e Álgebra. A utilização de meios visuais é essencial no ensino da Matemática, pois permite aos alunos visualizar e compreender melhor os conceitos abstratos (Libâneo, 1994).

O princípio didáctico de sistematização e consequência estabelece que o ensino da Matemática deve ser estruturado de forma lógica e coerente, seguindo uma progressão de complexidade que permita ao aluno compreender a matéria de forma integrada. Conforme Libâneo (1994), a sistematização favorece a aprendizagem cumulativa e o domínio das inter-relações entre os diferentes tópicos. A sistematização dos conteúdos é necessária para que os alunos compreendam a Matemática como um sistema de conhecimento organizado, onde cada conceito se relaciona com os demais (Libâneo, 1994).

O princípio didáctico de consolidação sugere que os conhecimentos adquiridos devem ser constantemente revisados e consolidados, de modo a garantir que os alunos assimilem de forma duradoura os conceitos fundamentais. Libâneo (1994) afirma que a consolidação é essencial para a fixação dos conteúdos e para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas de forma autônoma. O princípio de consolidação assegura que os conhecimentos não sejam apenas memorizados, mas profundamente compreendidos e aplicados em diferentes contextos (Libâneo, 1994).

No princípio didáctico de formar alunos conscientes, activos e com capacidade de trabalho independente, Libâneo (1994) sublinha a importância de desenvolver alunos que sejam críticos, reflexivos e capazes de trabalhar de forma independente. O ensino deve promover a autonomia intelectual e a capacidade dos alunos de pensar matematicamente, aplicando os conceitos aprendidos em situações novas. A formação de alunos autônomos e conscientes do seu processo de aprendizagem é um dos principais objectivos da educação Matemática (Libâneo, 1994).

O princípio didáctico de diferenciação e atenção individual defende que o ensino deve considerar as diferenças individuais entre os alunos, ajustando as metodologias e os conteúdos conforme as necessidades de cada um. Libâneo (1994) afirma que o ensino diferenciado é essencial para garantir que todos os alunos tenham oportunidades iguais de sucesso. A diferenciação no ensino garante que as necessidades específicas de cada aluno sejam atendidas, proporcionando um ambiente de aprendizagem inclusivo (Libâneo, 1994).

O princípio didáctico de contradição no processo de ensino refere-se à ideia de que o ensino deve incluir o enfrentamento de problemas e desafios, promovendo o desenvolvimento cognitivo por meio da superação de obstáculos. Segundo Libâneo (1994), a aprendizagem é dinâmica e implica a resolução de contradições, o que estimula o pensamento crítico e a criatividade dos alunos. “O princípio de contradição envolve a criação de situações-problema que desafiem o aluno a pensar criticamente e a superar dificuldades, promovendo um aprendizado mais profundo” (Libâneo, 1994).

4. OS MÉTODOS DE ENSINO DA MATEMÁTICA

No ensino da Matemática aplicam-se os seguintes métodos:

1. Métodos Lógicos (Indutivo, dedudtivo, genético, analítico, sintético, analítico-sintético).
2. Método Construtivo.
3. Método Axiomático.

Os métodos lógicos são ferramentas utilizadas para conduzir o raciocínio de maneira rigorosa e sistemática, sendo essenciais em diversas áreas do conhecimento, especialmente na Matemática, na Filosofia e nas Ciências Naturais. Eles orientam como as proposições são desenvolvidas e como os resultados são alcançados a partir de determinadas premissas. A seguir, são apresentados os principais métodos lógicos e suas definições.

O método indutivo consiste em derivar conclusões gerais a partir da observação de casos particulares. A lógica indutiva parte de observações específicas e busca generalizações ou leis que possam explicar fenômenos semelhantes. Este método é amplamente utilizado em ciências experimentais, onde hipóteses são testadas com base em observações empíricas. De acordo com Popper (2008), o método indutivo é fundamental para o progresso das ciências, embora seja sempre limitado, pois a generalização a partir de casos particulares não garante conclusões infalíveis.

O método dedutivo parte de premissas gerais para chegar a conclusões específicas. A lógica dedutiva é considerada mais rigorosa, pois se as premissas são verdadeiras, a conclusão também será verdadeira. Este método é fundamental na Matemática e na lógica formal, onde a partir de axiomas ou leis gerais, derivam-se teoremas e resultados particulares. Segundo Lakatos (1976), o método dedutivo é central para o desenvolvimento da Matemática, onde a validade das proposições é garantida pela coerência lógica com os axiomas estabelecidos.

O método genético refere-se à explicação dos fenômenos ou conceitos analisando sua origem e desenvolvimento ao longo do tempo. Este método é muito utilizado em ciências históricas e biológicas, onde a evolução e o desenvolvimento de entidades ou ideias são investigados. De acordo com Piaget (1970), o método genético é essencial para a compreensão do desenvolvimento cognitivo humano, visto que o estudo da gênese dos conceitos revela como o conhecimento é construído progressivamente.

O método analítico consiste em decompor um problema complexo em partes menores para facilitar sua análise e solução. Esse método é amplamente utilizado em Matemática e filosofia, onde problemas ou conceitos são desmembrados em componentes fundamentais. Segundo Resnik (1999), o método analítico é eficaz na resolução de problemas porque permite ao pesquisador focar em elementos específicos, facilitando a compreensão do todo através do estudo das partes.

O método sintético é o oposto do analítico, pois busca combinar elementos ou informações isoladas para formar uma visão ou conclusão mais ampla. Em vez de fragmentar, o método sintético integra diferentes componentes para gerar um entendimento coeso do problema. Para Kant (1999), o método sintético é crucial para a construção de novos conhecimentos, pois permite conectar proposições e ideias distintas de forma criativa e inovadora. Por exemplo na geometria, o método sintético é utilizado para construir figuras a partir de axiomas e postular novas proposições com base em resultados anteriores.

O método analítico-sintético, segundo Resnik (1999) envolve a combinação de dois processos distintos: análise e síntese, para explorar e fundamentar o conhecimento.

O método construtivo, muito utilizado na Matemática, refere-se ao desenvolvimento de conceitos ou soluções através da construção explícita de objectos ou estruturas. Diferente de métodos abstratos, o construtivismo exige que as soluções sejam encontradas de forma concreta, com a construção de exemplos ou modelos. Segundo Dummett (2000), o método construtivo é importante em áreas como a Matemática construtiva, onde a existência de um objecto matemático deve ser demonstrada através de sua construção explícita.

O método axiomático é um dos mais utilizados na Matemática e na lógica. Ele parte de um conjunto de axiomas ou proposições fundamentais aceitas como verdadeiras, e a partir desses axiomas, desenvolve-se toda uma teoria dedutiva. Este método é característico de sistemas formais, como a geometria euclidiana, onde todas as proposições são derivadas de um conjunto de axiomas. Hilbert (1902) foi um dos principais proponentes do método axiomático na Matemática, buscando uma formalização rigorosa dos conceitos geométricos a partir de axiomas claramente definidos. O sistema de Euclides para a Geometria Plana é um exemplo clássico de aplicação do método axiomático, partindo do axioma aos conceitos básicos e da representação geométrica, aos domínios numéricos.

5. O ENSINO-APRENDIZAGEM DOS ÂNGULOS ENTRE DOIS VECTORES

Reflete-se aqui, o contexto educacional do país, com desafios e avanços que se relacionam com o desenvolvimento da Matemática no sistema educactivo angolano. O estudo dos ângulos entre vectores, como parte da Geometria Analítica é essencial para que os alunos possam compreender fenômenos físicos, movimentos e aplicações práticas em diversas áreas. De acordo com Mário (2018), o ensino de vectores em geometria analítica tem uma importância crucial no ensino técnico, especialmente em áreas ligadas à engenharia e às ciências aplicadas. No entanto, é necessária uma maior articulação entre os conteúdos teóricos e suas aplicações práticas para que os alunos consigam dominar esses conceitos.

Os desafios no ensino dos ângulos entre dois vectores, consiste na formação dos professores, bem como adequação dos materiais didácticos. Segundo Caposso (2016), há uma necessidade de melhorar a formação dos professores de Matemática em Angola, particularmente na Geometria Analítica e Álgebra vectorial. A falta de recursos didácticos adequados também é apontada por Caposso (2016) como uma dificuldade por Caposso (2016). O uso de materiais que ajudem na visualização dos conceitos, como softwares de simulação e geometria dinâmica, ainda é limitado em muitas escolas do país. Segundo Mário (2018), o ensino de ângulos entre dois vectores pode ser aprimorado com o uso de problemas contextualizados, como a análise de movimentos em Física (vectores de força) ou em engenharia (análise de estruturas). Isso possibilita uma melhor compreensão do conceito por parte dos alunos e uma ligação directa entre a teoria e a prática.

6. CÁLCULO DO ÂNGULO ENTRE DOIS VECTORES

RECH- Revista Ensino de Ciências e Humanidades – Cidadania, Diversidade e Bem Estar. **ISSN 2594-8806**

Objectivo Geral: conhecer a aplicabilidade da Geometria Analítica no Plano.

Objectivos específicos: calcular o ângulo formado por dois vectores

Método de ensino: dedutivo, construtivo.

Estratégia: Trabalho independente, explicação e elaboração conjunta.

Tipo de aula: Apropriação de novos conhecimentos.

Definição: o cálculo do ângulo entre dois vectores, envolve o produto interno entre eles e seus respectivos comprimentos.

Dessa maneira, tomando os mesmos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o cosseno do ângulo theta, entre eles é dado pela seguinte expressão: $\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

Exemplo: Sejam os vectores $\vec{u}\,(2;2)$ e $\vec{v}\,(0;2)$, calcular o ângulo entre eles.

Dados	Fórmula/Resolução		
X1 = 2	$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$	$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$	$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$
Y1 = 2	$\vec{u} * \vec{v} = x_1 * x_2 + y_1 * y_2$	$= \sqrt{2^2+2^2}$	$= \sqrt{0^2+2^2}$
X2 = 0	= 2*0 +2*2	$= \sqrt{8}$	$= \sqrt{4}$
Y2 = 2	= 0 + 4	$= 2\sqrt{2}$	= 2
θ = ?	= 4		

$$\cos\theta = \frac{4}{2\sqrt{2}*2} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 45^0 \; ou \; \theta = \frac{\pi}{4}$$

Exercícios

1- Sejam os vectores $\vec{a}\,(2;3)$ e $\vec{b}\,(5;1)$ calcular o ângulo entre eles.

Dados	Fórmula/Resolução		
X1 = 2	$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$	$\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2+y^2}$	$\|\vec{b}\| = \sqrt{x^2+y^2}$
Y1 = 3	$\vec{a} * \vec{b} = x_1 * x_2 + y_1 * y_2$	$= \sqrt{2^2+3^2}$	$= \sqrt{5^2+1^2}$
X2 = 5	= 2*5 + 3*1	$= \sqrt{4+9}$	$= \sqrt{25+1}$

Y2 = 1 = 10 + 3 = $\sqrt{13}$ = $\sqrt{26}$

θ = ? = 13

$$\cos\theta = \frac{13}{\sqrt{13}*\sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{338}} = \frac{13}{18{,}38} \approx 0{,}707$$

$$\Rightarrow \ \theta = 45^0 \ ou \ \theta = \frac{\pi}{4}$$

2- Dado os pontos A(0;3) e B(4;0). Determina o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.

Dados Fórmula/Resolução

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4;0) - (0;3) = (4;-3)$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (0;3) - (4;0) = (-4;3)$$

X1 = 4 $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BA}|}$ $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Y1 = -3 $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BA} = x_1 * x_2 + y_1 * y_2$ $= \sqrt{4^2+(-3)^2}$ $= \sqrt{(-4)^2+3}$

X2 = -4 = 4*(-4) + (-3*3) $= \sqrt{16+9}$ $= \sqrt{16+9}$

Y2 = 3 = -16-9 = $\sqrt{25}$ = 5 = $\sqrt{25}$ = 5

θ = ? = -25

$$\cos\theta = \frac{-25}{5*5} = \frac{-25}{25} = -1$$

$$\Rightarrow \ \theta = 180^0 \ ou \ \theta = \pi$$

7. METODOLOGIA DE ESTUDO

Este estudo foi desenvolvido por meio de uma pesquisa qualitativa com enfoque descritivo, com o objectivo de compreender as percepções de professores e alunos sobre o ensino-aprendizagem do conceito de ângulo entre dois vectores. Segundo Creswell (2014), a pesquisa qualitativa busca compreender como as pessoas constroem o significado de suas experiências, o que, no contexto deste estudo, implica em investigar como os conceitos matemáticos são ensinados e compreendidos em sala de aula.

A seleção dos participantes foi feita de forma intencional a professores de Matemática e alunos da 10.ª classe, visando incluir indivíduos que possam oferecer uma diversidade de perspectivas e experiências com o ensino da Matemática. Foi realizada aos 37 alunos num horizonte de mais de 100 alunos da 10.ª classe. De acordo com

Merriam (2009), o uso de uma amostra intencional permite ao pesquisador selecionar participantes que tenham conhecimento ou experiência relevantes para o tema de pesquisa. Nesse estudo, isso significa escolher professores que utilizam diferentes metodologias de ensino e alunos com diferentes níveis de compreensão dos conceitos matemáticos. A turma B do Curso Técnico de Energias Renováveis, onde a aula foi observada, é composta por 43 alunos, estiveram presentes 37 alunos dos quais 15 são meninas.

A colecta de dados, foi realizada por meio de observação, sendo a observação uma técnica que envolve o estudo detalhado de comportamentos, acções, eventos ou interações neste contexto, em relação ao ensino do conceito de ângulo entre dois vectores. Segundo Flick (2013).

Após a observação das aulas e entrevistas com professores e alunos podem oferecer uma visão mais profunda das dificuldades, percepções e metodologias utilizadas no ensino do cálculo de ângulos entre vectores. Assim, os dados colectados foram analisados utilizando a técnica de análise de conteúdo. Segundo Bardin (2011), a análise de conteúdo é uma técnica de pesquisa que permite identificar, categorizar e interpretar temas emergentes a partir dos dados qualitactivos colectados. Para este estudo, as transcrições das observações e entrevistas foram analisadas, para identificar temas relacionados às percepções sobre o ensino de ângulos entre dois vectores, desafios didácticos e sugestões de melhoria.

8. ANÁLISE DA AULA OBSERVADA

8.1. Pontos Positivos

Pontualidade e organização: A aula começou pontualmente e foi bem estruturada, com o professor José Gonga seguindo uma planificação clara e organizada, começando com o sumário e uma introdução ao tema principal, "Ângulo entre dois vectores". Isso mostra responsabilidade e um bom exemplo de disciplina para os alunos.

Participação dos alunos: Durante a demonstração no quadro, os alunos interferiram, fazendo perguntas e sugestões, o que indica que o ambiente era aberto à interação e que os alunos se sentiam à vontade para questionar e corrigir o professor. Essa dinâmica colaborativa pode ser benéfica para a aprendizagem colectiva.

Uso de referencial cartesiano: A utilização de um referencial cartesiano na explicação é um ponto positivo, já que o uso de representações visuais pode facilitar a compreensão de conceitos abstratos, como o cálculo de ângulos entre vectores.

8.2. Pontos Negactivos

Insegurança do professor: O professor demonstrou insegurança ao se deparar com um erro durante a resolução de um exercício no quadro. Isso ficou evidente quando um aluno questionou a escrita incorreta de "raiz de oito" e o professor não conseguiu explicar adequadamente ou resolver a questão, além de devolver a pergunta à turma, que também não soube responder. Esse momento de incerteza comprometeu a confiança dos alunos no conteúdo apresentado.

Ditado de apontamentos: A prática de ditar apontamentos, em vez de guiar os alunos através do raciocínio e dos exemplos no quadro, limita a aprendizagem. Ao não explicar ou construir o conhecimento de maneira gradual e lógica, os alunos podem se sentir perdidos e inseguros, como aconteceu na resolução de exemplos inacabados.

Falta de resumo e consolidação da aula: No fim da aula, não houve um resumo ou revisão dos pontos principais abordados. A ausência de uma síntese ou de uma discussão com os alunos pode dificultar a fixação dos conceitos e deixar questões importantes sem serem esclarecidas.

Falta de participação pctiva dos alunos: Mesmo com o ambiente de discussão durante a demonstração, nenhum aluno foi chamado ao quadro para resolver exercícios ou participar de forma activa. Percebe-se que o professor não incentivou suficientemente a autonomia dos alunos na aplicação prática dos conceitos discutidos.

8.3- Aspectos que carecem de melhorias

Clareza na demonstração de conceitos: O professor precisa melhorar a clareza na explicação dos conceitos. Para evitar confusões como a do exercício da raiz quadrada, é essencial que ele revise e domine o conteúdo antes da aula. É importante também que as demonstrações sejam cuidadosamente preparadas para evitar erros.

Gestão da participação dos alunos: O professor deve incentivar a participação dos alunos de forma estruturada, por exemplo, chamando alunos para o quadro e guiando-os na resolução de exercícios. Isso pode aumentar a confiança dos alunos e reforçar a compreensão do conteúdo.

Uso de recursos didácticos: O uso de outros recursos didácticos, como ferramentas visuais, animações, ou até mesmo simuladores gráficos, poderia ajudar na explicação de conceitos abstratos, como ângulos entre dois vectores, tornando a aula mais interativa e visualmente atrativa.

Resolução de exercícios de forma conjunta: A resolução dos exercícios deve ser realizada de forma mais colaborativa, envolvendo mais os alunos no processo. Em vez de o professor resolver o exercício sozinho no quadro, ele poderia orientar os alunos a resolverem por etapas, verificando a compreensão em cada passo.

CONCLUSÕES

Uma aula sobre o cálculo do ângulo formado por dois vectores geralmente explora conceitos fundamentais em Álgebra Vectorial e Geometria Analítica. No entanto a dupla de pesquisa conclui que o ângulo entre dois vectores é uma medida de orientação relactiva desses vectores em um espaço, geralmente em um plano bidimensional. O estudo do ângulo entre dois vectores é uma parte essencial da Matemática aplicada, com relevância tanto em contextos acadêmicos quanto práticos. Através do produto escalar, é possível calcular o ângulo entre dois vectores, o que facilita a análise de relações geométricas e vectoriais em diversas disciplinas. Apesar da simplicidade da fórmula Matemática, o ensino deste conceito exige um enfoque didáctico que favoreça a compreensão dos alunos, especialmente no que diz respeito às suas aplicações práticas.

SUGESTÕES

Preparação antecipada dos conteúdos: O professor deve preparar cuidadosamente as demonstrações e os exemplos antes da aula para garantir que não haverá confusões ou erros durante a explicação. Isso inclui revisar previamente os exercícios que serão propostos aos alunos.

Resumo no fim da aula: É recomendável que o professor reserve alguns minutos no fim de cada aula para fazer um resumo dos conceitos abordados. Essa prática ajuda na consolidação e permite que os alunos esclareçam dúvidas antes de sair da sala de aulas.

Maior envolvimento dos alunos: Sugere-se que o professor promova mais actividades em que os alunos possam aplicar os conceitos aprendidos, seja resolvendo exercícios no quadro ou discutindo em grupos. O envolvimento activo dos alunos pode ajudar a fixar melhor os conteúdos. O professor deve fornecer *feedback* contínuo durante a aula, corrigindo erros de forma imediata e clara, e incentivando os alunos a questionarem e verificarem suas compreensões do conteúdo. Além disso, deve corrigir de forma construtiva os erros e esclarecer as dúvidas que surgirem durante a aula e não só.

Para aprofundar o estudo sobre ângulos entre dois vectores, sugere-se a realização de pesquisas em dois eixos principais: 1. Didática e ensino: Investigar abordagens pedagógicas eficazes para o ensino de vectores e produtos escalares, considerando as dificuldades enfrentadas pelos alunos em visualizar e compreender o conceito de ângulos entre vectores. Abordagens visuais e interactivas, como o uso de software de geometria dinâmica, podem ser exploradas. 2. Aplicações tecnológicas: Explorar o uso do cálculo de ângulos entre vectores em áreas emergentes, como inteligência artificial e robótica, onde a manipulação de vectores em espaços multidimensionais é crucial. Estudos que vinculem a Matemática teórica com essas áreas tecnológicas podem contribuir para o avanço tanto da ciência quanto da educação.

REFERÊNCIAS

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Caposso, P. A. (2016). *Formação e desenvolvimento profissional de professores de Matemática em Angola*. Luanda: Editora da Universidade Agostinho Neto.

Lima, A. P., & Lobo, C. A. (2017). *Vectores e geometria analítica: uma introdução ao espaço euclidiano.* São Paulo: Editora Universitária.

Libâneo, J. C. (1994). *Didática*. São Paulo: Cortez Editora.

Mário, J. S. (2018). *A educação Matemática em Angola: Desafios e perspetivas para o século XXI*. Benguela: Instituto Superior de Ciências da Educação.

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. San Francisco: Jossey-Bass.

Neto, A. & Silva, R. (2020). *O ensino da Matemática em Angola: Práticas e perspectivas futuras.* Luanda: Editora Nova Angola.

Santos, C. (2021). *A importância da formação contínua de professores de Matemática em Angol*a. Luanda: Editora Educação e Futuro.

Silva, R. J., & Martins, F. T. (2018). *Aplicações do produto escalar na física e computação gráfica*. Rio de Janeiro: Editora Técnica.

Aquino, O. F. (2016). *Fundamentos epistemológicos da ciência Didática: contribuições de Mikhail A. Danilov. Educação Unisinos,* 20(2), 234-244.

Konga, M., & Nzau, D. K. (2023). *Ensino-aprendizagem de Matemática no âmbito de estratégias construtivistas no ensino secundário angolano.* Recima 21-Revista Científica Multidisciplinar-ISSN 2675-6218, 4(7), e473440-e473440.

Winterle, P., & Steinbruch, A. (2000). *Geometria analítica*. Makron Books, 2ª Edição São Paulo.

APÊNDICES

10ª B/ER SALA 14

GRELHA DE OBSERVAÇÃO DE AULAS

Escola INSTITUTO POLITÉCNICO DO SUMBE Município SUMBE Prov. C. SUL

Disciplina MATEMÁTICA Período MANHÃ Classe 10ª Horas: das 7:55 às 8:45 min

Tema da aula: ÂNGULO ENTRE DOIS VECTORES

1.0	**PLANIFICAÇÃO DE AULAS**	
1.2	Definição dos objectivos	BEM
1.3	Relação objectivos - conteúdo	EM CONFORMIDADE
1.4	Relação conteúdo – métodos	CONFORME
1.5	Relação conteúdo – meios de ensino	CONFORME
2.0	**INTRODUÇÃO/MOTIVAÇÃO**	
2.1	Saudação	Sim
2.2	Chamada	Não houve
2.3	Controlo da tarefa do dia anterior	Não houve tarefa
2.4	Orientação aos objectivos da aula	Não se verificou
3.0	**DESENVOLVIMENTO DA AULA**	
3.1	Domínio do conteúdo	Pouco Domínio
3.2	Linguagem oral e escrita	Mal
3.3	Grau de participação dos alunos	Boa
3.4	Prestação de atenção individualizada	Não se verificou
3.5	Controlo da turma	Não houve
3.6	Aspectos educativos	Não se verificou
3.7	Gestão do tempo	~~Não~~ houve
4.0	**AVALIAÇÃO**	
4.1	Realização de avaliação contínua	Não se verificou
4.2	Utilização dos instrumentos de avaliação	Não houve
5.0	**METODOLOGIAS UTILIZADAS**	
5.1	Metodologia semi-participativa	Sim
5.2	Metodologia participativa	
6.0	**MANUSEAMANTO DO MATERIAL**	
6.1	Utilização do quadro	usou incorrectamente
6.2	Utilização do apagador	usou
6.3	Orientação à observação dos meios de ensino	não houve qualquer orientação
6.4	Uso do manual do aluno	Em nenhum momento se usou o manual
7.0	**CONCLUSÃO DA AULA**	
7.1	Perguntas de controlo	Não houve
7.2	Resumo da aula	Não houve
7.3	Orientação de tarefa para casa	~~Não~~ houve
7.4	Cumprimento dos objectivos da aula	Cumprido pela metade
8.0	**ATITUDE DO ESTUDANTE OBSERVADO**	
8.1	Relações humanas com os alunos	Boa
8.2	Criatividade	Não se verificou
8.3	Sentido de autocrítica	

Data: 03/06/2024

O(A) Estudante observado(a) — José Gonzaga

O(A) Observador(a) — Antonio Romeu Lede