Revista AMAzônica, LAPESAM/GMPEPPE/UFAM/CNPq
ISSN 1983-3415 (versão impressa) - eISSN 2558 – 1441 (Versão digital)

Vol 17, Núm 2, julho-dez, 2024, pág. 558-580

Uma proposta de atividade sobre relações trigonométricas para o 3º ano do ensino médio a partir do Kamal Náutico

An activity proposal on trigonometric relationships for the 3rd year of high school from Náutico Kamal

Letícia de Souza Castro[1]

Tamiris Paula de Moura[2]

Francisco Wagner Soares Oliveira[3]

RESUMO

A História da Matemática tem ganhado cada vez mais espaço no campo da Educação Matemática, principalmente pelas possibilidades de recursos que ela pode fornecer para o cenário educacional. Os instrumentos matemáticos são um exemplo desses recursos advindos da história. Como forma de caminhar na direção de estudos que têm explorado os instrumentos matemáticos, com vistas a favorecer o processo de ensino e de aprendizagem de matemática, elencamos para estudo o instrumento Kamal Náutico. Nosso objetivo é apresentar uma proposta de atividade que utilize o instrumento náutico conhecido por Kamal, abordando o conceito de Relações Trigonométricas, em específico, a tangente, tendo como público-alvo estudantes do 3º ano do ensino médio, sob o aporte teórico da Teoria das Situações Didáticas (TSD). A pesquisa é desenvolvida com base em uma abordagem qualitativa de cunho exploratório. Tendo como resultados esperados possibilitar ao aluno a exploração dos conceitos matemáticos de forma prática, rompendo o viés apenas expositivo, normalmente presente nas regências da área de exatas. Ao final, conclui-se que se trata de um trabalho minuciosamente pensado e com uma riqueza de detalhes matemáticos, abordando o desenvolvimento de uma atividade diversificada, juntamente com recortes históricos de extrema importância para o conhecimento e relação com a História da Matemática e ainda com a presença de um conteúdo de difícil compreensão, por parte dos alunos.

Palavras-chave: Relações Trigonométricas; Teoria das Situações Didáticas (TSD); Kamal Náutico; História da Matemática.

ABSTRACT

The History of Mathematics has been gaining more and more space in the field of Mathematics Education, mainly due to the possibilities of resources that it can provide

[1] Graduação em licenciatura em matemática pela Universidade Estadual do Ceará. Email: leticinha.castro@aluno.uece.br. Orcid: https://orcid.org/0009-0002-2584-6785

[2] Graduação em licenciatura em matemática pela Universidade Estadual do Ceará. Email: tamiris.paula@aluno.uece.br. Orcid: https://orcid.org/0009-0008-9114-7484

[3] Doutor em educação e professor adjunto do curso de licenciatura em matemática da Universidade Estadual do Ceará. Email: wagneruece.oliveira@uece.br. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-9296-8200

for the educational scenario. Mathematical instruments are an example of these resources coming from history. As a way of moving towards studies that have explored mathematical instruments, with a view to favoring the process of teaching and learning mathematics, we selected the Kamal Náutico instrument for study. Our objective is to present a proposal for an activity that uses the nautical instrument known as Kamal, addressing the concept of Trigonometric Relations, specifically, the tangent, with the target audience being students in the 3rd year of high school, under the theoretical support of the Theory of Situations Didactics (TSD). The research is developed based on a qualitative, exploratory approach. The expected results are to enable the student to explore mathematical concepts in a practical way, breaking the expository bias, normally present in the areas of exact sciences. In the end, it is concluded that this is a meticulously thought out work with a wealth of mathematical details, addressing the development of a diverse activity, together with historical highlights of extreme importance for knowledge and relationship with the History of Mathematics and also with the presence of content that is difficult for students to understand.
Keywords/Palabras clave: Trigonometric Relations; Theory of Didactic Situations (TSD); Kamal Náutico; History of Mathematics.

INTRODUÇÃO

A princípio, pode-se destacar a grande influência da História da Matemática no ensino e aprendizagem dos estudantes, visto que, a partir dela, pode-se, por exemplo, conhecer o processo de construção do conhecimento matemático e tornar o ensino de matemática mais interessante e contextualizado (Chaquiam, 2017; Mendes, 2022; Saito, 2015). No contexto brasileiro, antes mesmo dos anos 2 (dois) mil os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1998) já assinalavam que trabalhar com a história no ensino, seria uma alternativa para contribuir diretamente na construção do pensamento dos alunos, uma vez que, remete métodos presentes na própria história das concepções estudadas, possibilitando diversos meios de abordagens.

A partir disso, nota-se que a utilização da história, ou de recursos fornecidos por ela, no ensino, não se limita apenas a narração de fatos, mas sim uma forma de trazer elementos do contexto e do processo de construção do conhecimento matemático para a aula. Com isso, sabe-se que dentre os variados tópicos abordados na escola e considerando as inúmeras formas de incorporar elementos da História da Matemática no ensino, uma alternativa é buscar explorar instrumentos antigos que têm conceitos matemáticos sintetizados, tais ferramentas estão presentes em campos distintos, como os náuticos, os astronômicos e os de agrimensura, dentre outros (Saito, 2015; Batista; Pereira, 2022, 2023).

Ainda neste quesito, optamos pelas experiências náuticas, particularmente um instrumento matemático, para desencadear uma proposta de trabalho. Dentre os muitos assuntos matemáticos abordados na Educação Básica, nos atemos à trigonometria, por se tratar de um conteúdo complexo. Desse modo, buscamos uma maneira de introduzir a trigonometria utilizando a História da Matemática a partir de um instrumento náutico, o Kamal.

Como forma de caminhar nessa direção, foi traçado como objetivo apresentar uma proposta de atividade que utilize o instrumento náutico conhecido por Kamal, abordando o conceito de Relações Trigonométricas, em específico, a tangente, tendo como público-alvo estudantes do 3º ano do ensino médio, sob o aporte da Teoria das Situações Didáticas (TSD).

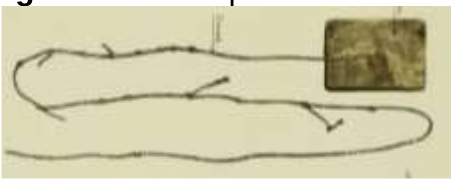
Para o desenvolvimento deste estudo, fizeram-se necessárias pesquisas bibliográficas acerca da trigonometria e sua presença na utilização do instrumento Kamal Náutico em uma situação prática de medição, além de informações essenciais sobre o aparato e sua relação com a História da Matemática. Dessa maneira, consideramos um pouco da história de utilização do Kamal, seguindo pela matemática presente em seu uso, em específico, as relações trigonométricas, em seguida, o manuseio do artifício durante a atividade proposta.

O KAMAL NÁUTICO COMO RECURSO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

De início, é possível encontrar um pouco acerca da presença do Kamal no livro Instrumentos de Navegação, de 1988, escrito por Luís de Albuquerque. A partir dessa obra, também encontramos outro nome que recorrentemente tem sido utilizado para se referir ao Kamal, sendo ele “tavoletas da Índia”, esse nome, deve-se ao fato de ele ser composto por uma tábua, ou mais, podendo ser quadrada ou retangular, esta tábua também recebia o nome de “tavoletas”, de origem portuguesa (Albuquerque, 1988).

Também se encontram informações sobre este instrumento no livro Obras Completas de 1946, com autoria de Luciano Pereira da Silva, no qual também expõe a história do Kamal, trazendo imagens para uma melhor compreensão, assim como a figura a seguir, onde mostra que o Kamal era composto por uma tábua de madeira e um cordel.

Figura 1 – Exemplares de Kamal.

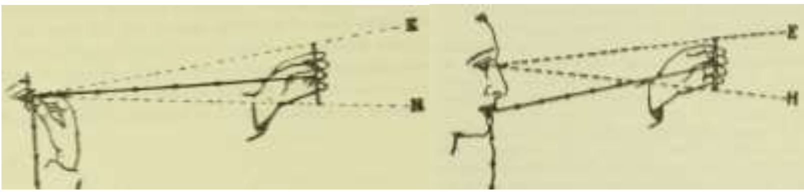


Fonte: Silva (1946, p. 32).

O primeiro registro de manuseio do Kamal foi por pilotos no Oceano Índico, sendo trazido, pelos marinheiros de Vasco da Gama, para a Europa, no ano de 1499, além de ser experimentado por cosmógrafos portugueses, para, posteriormente, serem usados por pilotos brasileiros (Albuquerque, 1988).

O Kamal era composto, normalmente, por uma tábua, na qual era fixada um cordel com nós dispostos de maneira conveniente. A altura do astro era obtida a partir da escolha do nó que possibilitasse observar o horizonte na extremidade inferior da tábua e o astro na extremidade superior. Para isso, era necessário levar o nó à vista do observador, ou até a boca, , segurando o nó adequado com os dentes (Albuquerque, 1988). Em ambos os casos o cordel deve estar completamente esticado, Figura 2:

Figura 2 – Da esquerda para a direita: observação levando o nó à vista e levando o nó à boca



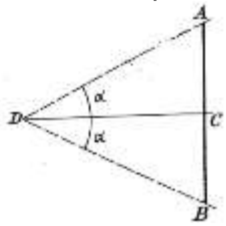
Fonte: Silva (1946, p. 34 e p. 37).

Dessa forma, o ângulo encontrado dependia diretamente das medidas da tábua e do nó selecionado em meio às disposições dadas convenientemente. Entretanto, por conta da maneira de manejar o Kamal, a distância do nó não pode ser maior que o braço, neste contexto que entra alguns destes instrumentos com mais de uma tábua, onde as menores mediam entre 5º e 14º, enquanto as maiores mediam alturas superiores a 15º (Albuquerque, 1988).

Revista AMAzônica, LAPESAM/GMPEPPE/UFAM/CNPq
ISSN 1983-3415 (versão impressa) - eISSN 2558 – 1441 (Versão digital)

Para compreender a utilização do Kamal, é fundamental encontrar a matemática por trás deste instrumento, assim, tome A e B sendo as extremidades da tábua do Kamal, independentemente de seu tamanho, veja abaixo (Figura 3):

Figura 3 – Matemática por trás do Kamal



Fonte: Albuquerque (1988, p. 33).

O segmento CD refere-se à bissetriz do ângulo localizado no ponto D, que corresponde à altura astronómica de 2α, logo, temos a formação de dois triângulos retângulos. Portanto, pode-se aplicar o Teorema de Pitágoras, no qual afirma que o quadrado de sua hipotenusa é igual à soma dos quadrados de seus catetos, assim, conclui-se que $BD^2 = BC^2 + CD^2$ e $AD^2 = AC^2 + CD^2$.

Normalmente o problema estava em descobrir a medida CD, onde apresenta os nós contidos no cordel. Assim, António Barbosa, historiador português que demandou tempo estudando as tavoletas da Índia, chegou à $DC = AC \cdot \text{cotg}\ \alpha$ e $BD = + \sqrt{\mathrm{BC2} + \mathrm{CD2}}$, informações tiradas dos triângulos retângulos ACD e BCD, apresentados na Figura 3, ou seja, também podemos notar a presença das relações trigonométricas.

Já para a inserção dos nós ao longo do cordel, podemos seguir as instruções encontradas em testemunhos de portugueses por volta do século XVI, determinadas por James Prinsep, inglês responsável por descrever os instrumentos para obter a altura das estrelas, da marinha oriental, além de ser secretário da *Asiatic Society* de Calcutá. É necessário tomar uma unidade de comprimento $L = 5l$, onde l corresponde a medida lateral da tábua do Kamal, que, para este cálculo, a tábua deve ser quadrada. Dessa forma, para um Kamal de 12 nós, temos que, iniciando a contagem a partir da tábua, a distância da tábua ao primeiro nó será calculada por $\frac{6L}{12}$, enquanto o segundo nó terá uma medida de $\frac{6L}{11}$ e assim por diante.

Para finalizar este tópico, pode-se citar uma outra abordagem acerca do uso do Kamal na Educação Básica. Mediante Pereira e Batista (2017), existe uma discussão acerca da articulação entre a história, o ensino e o aprendizado da matemática, em específico, através do instrumento Kamal Náutico e das relações trigonométricas presentes nele. Nesta obra, há a exposição de um estudo sobre esta articulação, na qual foram enunciadas as compreensões de discentes do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual do Ceará (UECE). Houve uma apresentação do Kamal, assim como os aspectos matemáticos de seu uso e, por fim, resultados coletados após a execução de um curso, a respeito desse instrumento, voltado à formação inicial de professores.

O CONCEITO DE RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS PRESENTE NO KAMAL NÁUTICO

Como visto no tópico anterior há a presença da cotangente nos cálculos, a fim de contribuir no aprendizado houve uma pequena adaptação nos cálculos, de forma que o aluno utiliza a tangente. Para a construção deste pensamento vamos partir desde a construção do Kamal e fazer uso das instruções de Prinsep.

Assim, o Kamal é produzido por uma tábua e um cordel com determinados nós. O primeiro passo é o recorte da tábua, que deve ser quadrada, optamos por uma lateral de 5 centímetros, lembrando que este tamanho é arbitrário, mas terá influências nos graus observados. Para a construção da tábua quadrada pode ser escolhido um material que contribua na manipulação, assim, fizemos uso de capas de caderno, visto que, é possível recortar facilmente. Para o cordel pode-se usar um cordão de fácil acesso, o mais adequado é um que não tenha elástico, já que, deve-se manter ele esticado, o que pode alterar entre os participantes. Pensando neste ponto, usamos um cadarço aleatório, dentro da propriedade dita, diante desses recursos, nota-se que não é necessário materiais sofisticados.

Colocando as instruções de Prinsep em prática, temos que a unidade de comprimento $L = 5l$ será $L = 25$ cm, pois $l = 5$ cm, referente ao lado da tábua quadrada. Assim, os doze nós, terão as seguintes distâncias da tábua:

Quadro 1 – Medidas para a construção dos nós do Kamal

1º nó	$\frac{6L}{12} = \frac{150}{12} = 12{,}50\ cm$
2º nó	$\frac{6L}{11} = \frac{150}{11} = 13{,}64\ cm$
3º nó	$\frac{6L}{10} = \frac{150}{10} = 15{,}00\ cm$
4º nó	$\frac{6L}{9} = \frac{150}{9} = 16{,}67\ cm$
5º nó	$\frac{6L}{8} = \frac{150}{8} = 18{,}75\ cm$
6º nó	$\frac{6L}{7} = \frac{150}{7} = 21{,}43\ cm$
7º nó	$\frac{6L}{6} = \frac{150}{6} = 25{,}00\ cm$
8º nó	$\frac{6L}{5} = \frac{150}{5} = 30{,}00\ cm$
9º nó	$\frac{6L}{4} = \frac{150}{4} = 37{,}50\ cm$
10º nó	$\frac{6L}{3} = \frac{150}{3} = 50{,}00\ cm$
11º nó	$\frac{6L}{2} = \frac{150}{2} = 75{,}00\ cm$
12º nó	$\frac{6L}{1} = \frac{150}{1} = 150{,}00\ cm$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Com o Kamal confeccionado, pode-se encontrar a matemática inclusa em seu uso, vamos analisar um caso em particular. Para isso, são necessárias algumas informações, as quais surgem mais detalhadamente na atividade proposta, onde serão dispostas dez estrelas numeradas e ordenadas de forma crescente, que devem ser fixadas na parede e com um ponto de referência para simbolizar o horizonte das navegações, todas medidas serão discutidas posteriormente. Para exemplificar a matemática, considere a estrela 1, com a observação correta, considerando as distâncias já determinadas e fixas, o quarto nó é o ideal, que, pelo Quadro 1, a distância da tábua até este ponto corresponde a 16,67 cm. Para encontrar esta medida, usa-se o método de Prinsep, sendo $\frac{6L}{9}$, o denominador desta fração refere-se à contagem decrescente dos nós, partindo da tábua. Assim, há duas maneiras de contar os nós, ambas partindo da tábua, veja o quadro abaixo:

Revista AMAzônica, LAPESAM/GMPEPPE/UFAM/CNPq
ISSN 1983-3415 (versão impressa) - eISSN 2558 – 1441 (Versão digital)

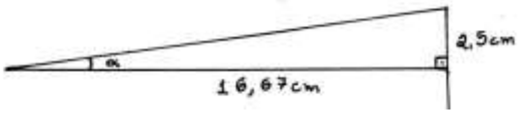
Quadro 2 – Contagem dos nós do Kamal

Contagem	Posição											
Crescente	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Decrescente	12º	11º	10º	9º	8º	7º	6º	5º	4º	3º	2º	1º

Fonte: Elaborado pelos autores.

O professor deve realizar uma ênfase nesta relação, visto que, para aplicar o que propõe Prinsep tem que fazer uso apenas da contagem decrescente. Assim, já se têm dados suficientes para aplicar a tangente, pois, semelhante a Figura 3, temos as medidas que correspondem a dois dos catetos do triângulo retângulo, formado ao usar o Kamal.

Figura 4 – Estrela 1



Fonte: Elaborado pelos autores.

Considerando o ângulo demarcado e nomeado por α, as medidas 2,5 cm e 16,67 cm, equivalem aos catetos oposto e adjacente, respectivamente. Uma das maneiras de calcular a tangente de um ângulo é por meio da razão entre o cateto oposto e o adjacente, portanto, a estrela 1 terá $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{2{,}5\text{cm}}{16{,}67\text{cm}} \approx 0{,}15$. Para encontrar o valor do ângulo basta aplicar o arco tangente, onde deve ser utilizada uma calculadora científica, encontrando $\mathrm{arctg}(0{,}15) \approx 8{,}53°$. É importante lembrar que esta medida equivale apenas a α, mas, a altura angular é obtida por 2α, assim, o último passo seria duplicar o valor deste ângulo, encontrando a altura angular da estrela 1 igual a $2\alpha = 17{,}06°$.

METODOLOGIA

Para a confecção deste trabalho foi necessária a presença de uma abordagem qualitativa de pesquisa. Para Flick (2009), a pesquisa qualitativa abrange desde uma escolha de métodos, assim como um estudo acerca de perspectivas diversas e reflexões, tratando-se das apurações encontradas, além de englobar uma pluralidade de condutas e metodologias. Esta abordagem de pesquisa surge quando o professor inicia uma investigação minuciosa sobre a construção, aplicação da atividade e sua repercussão na sala de aula, explorando uma junção entre o conteúdo e a TSD defendida, por Brousseau (2008), Almouloud (2007) e Oliveira (2018), dentre outros autores.

Além disso, quanto aos fins e objetivos, também podemos citar a presença da pesquisa exploratória na construção deste trabalho. Segundo Gil (2008), os estudos nessa categoria buscam explorar conceitos, realizando investigações para uma melhor compreensão de ideias, com foco no aperfeiçoamento dos problemas trabalhados, visando contribuir em propostas futuras. No trabalho em questão, a pesquisa exploratória ocorre no instante em que se cria uma proposta de ensino distinta envolvendo relações trigonométricas, uma vez que, há uma exploração sobre a aplicação e os resultados esperados, com possibilidades de alterações para futuras práticas.

Historicamente, sabe-se que as regências de Matemática ocorrem com o ensino por meio do professor, de forma expositiva no quadro, e a aprendizagem, pelos alunos, através da observação e da resolução de exercícios de fixação. Dessa forma, o docente passa a ser visto como um possuidor de saberes, tendo o papel de conduzir as etapas educacionais, restando ao aluno apenas a missão de sujeito passivo. Com isso, para que haja uma evolução no ensino, é necessário haver uma ruptura deste cenário, uma sugestão para este caso é realizar o uso da TSD (Batista, 2019).

O francês Guy Brousseau foi responsável pela elaboração da TSD, teoria que procura tornar os alunos, sujeitos ativos na aprendizagem, ou seja, busca incluir o aluno como um protagonista em seu processo educacional (Brousseau, 2008). Para isso, é essencial saber o significado de situação adidática, que, para Brousseau (1986), refere-se ao momento em que o aluno conduz sua própria aprendizagem, através dos processos de ação, além de explicar e formular hipóteses acerca do problema dado pelo professor.

Dessa forma, para a aplicação da TSD são necessárias quatro etapas, ação, formulação, validação e institucionalização. Na ação, o aluno tem contato com o problema proposto pelo professor, sendo a solução deste diretamente relacionada com o avanço em sua aprendizagem (Brousseau, 2008; Almouloud, 2007; Oliveira, 2018). Nesta etapa, considerando a proposta de atividade desenvolvida com o Kamal, o professor deve questionar acerca de modos para calcular a altura angular de estrelas.

Na etapa seguinte, a formulação, deve haver um diálogo acerca das possíveis soluções, acompanhada da validação que corresponde aos usos de meios e instrumentos para comprovar o que foi discutido na etapa anterior (Brousseau, 2008; Almouloud, 2007; Oliveira, 2018). Assim, na formulação é onde ocorre o uso do instrumento náutico, Kamal, buscando a melhor observação das estrelas, sempre conferida por dois alunos, enquanto na etapa de validação, prevista pela TSD, os alunos devem se reunir para realizar os cálculos fazendo uso dos conhecimentos, acerca de relações trigonométricas, incorporados na utilização do Kamal.

Por fim, temos a etapa de institucionalização, onde o professor intervém por meio de diálogos construtivos, buscando ouvir as soluções dos estudantes, além de explicar por que os passos estão corretos, ou seja, nesta etapa há compreensão dos resultados encontrados nas etapas anteriores (Brousseau, 2008; Almouloud, 2007; Oliveira, 2018). No contexto da atividade pensada, este momento refere-se à verificação dos cálculos efetuados pelos grupos. Confira, abaixo, o passo a passo da atividade elaborada.

PROPOSTA DE ATIVIDADE: UMA JORNADA MARÍTIMA ATRAVÉS DAS ESTRELAS

Apresentação da atividade: Fazendo uso do Kamal Náutico, é possível calcular a altura angular das estrelas, medida essa que servia de orientação para determinar a localização durante as navegações. Tendo em vista tal uso, foi pensada e manipulada uma atividade envolvendo este instrumento, surgindo possibilidades de aplicação em sala de aula, abordando diretamente as relações trigonométricas, em específico, o conceito de tangente.

Guia do professor: Material didático manipulável

Figura 5 – Kamal Náutico

Fonte: Elaborado pelos autores.

Como já mencionado, este Kamal foi construído com capa de caderno, para recortar a tábua quadrada, cadarço sem elástico, para o cordel, além de cola quente para fixar o cadarço ao centro da tábua, e revestimos o quadrado com papel color set, mas fica a critério do professor. Outra observação é acerca dos nós, o décimo segundo nó ficaria a uma distância de 1,5 m, fora do alcance de um braço, então, optamos por trabalhar apenas até o décimo primeiro nó, com 75 cm de comprimento. Elementos da atividade:

Quadro 3 – Resumo da prática

<table>
<tr><th colspan="2">Série/Ano</th><td>3º ano do Ensino Médio</td></tr>
<tr><th colspan="2">Unidade temática</th><td>Geometria</td></tr>
<tr><th colspan="2">Objeto de conhecimento</th><td>Relações métricas e trigonométricas em triângulos e círculos.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Habilidade</th><td>(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. (Ceará, 2021, p. 171).</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Objetivos</th><th>Docente</th><td>Desenvolver a habilidade de aplicar conceitos básicos das relações trigonométricas, em específico, a tangente, na solução de um problema da navegação, através de um instrumento náutico, especificamente o Kamal Náutico.</td></tr>
<tr><th>Aluno</th><td>Aplicar conceitos básicos das relações trigonométricas, em específico, a tangente, na solução de um problema da navegação, através de um instrumento náutico, especificamente o Kamal Náutico.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Materiais necessários</th><td>Para a realização do experimento é necessário que o professor esteja com os seguintes materiais disponíveis aos alunos:
1) Kamal confeccionado (5); 2) Estrelas numeradas de 1 à 10; 3) 5 Faixas para representar o horizonte (cerca de 30 cm cada); 4) Fita de cetim (cerca de 4 m); 5)</td></tr>
</table>

	Calculadora científica (5); 6) Trena; 7) Fita gomada; 8) Enredo para contextualizar a atividade; 9) Aparelho de som; 10) Músicas; 11) Pergaminhos impressos; e 12) Nomes impressos, referentes aos portos.
Conhecimentos prévios	Para que a prática flua é necessário que os alunos tenham conhecimento sobre as relações métricas e trigonométricas básicas, especificamente a tangente.
Duração	2 horas/aulas

Fonte: Elaborado pelos autores.

Aspectos gerais do experimento: *Sinopse* - Neste experimento, os alunos deverão fazer uso do Kamal, a fim de vivenciar experiências náuticas e perceber a presença do conteúdo de trigonometria nos cálculos da altura angular das estrelas, que tem incorporado no uso do instrumento o conceito de tangente.

O experimento: consiste em pôr os alunos para observar a altura das estrelas, por meio da tábua do Kamal, onde o horizonte deve estar na parte inferior e a estrelas na extremidade superior, fazendo a contagem dos nós usados para a melhor observação. A partir da quantidade de nós é possível saber a medida do cordão, que será usada no cálculo da tangente, visto que, representará o cateto adjacente, enquanto metade da tábua será o cateto oposto. Para isso, vão ser realizados três momentos, que consistem: 1) na organização do cenário; 2) manejo e captação de dados, e, por fim, 3) cálculos onde se deve verificar as respostas dos alunos.

Preparação: Os alunos devem formar cinco grupos. O *primeiro momento* consiste na organização das estrelas (Figura 6) e dos portos (Figura 7). O *segundo momento* ocorre com os alunos manipulando o instrumento Kamal, coletando dados suficientes para mobilizar o conceito de tangente, por meio de cálculos, antes vistos em sala de aula. O *terceiro momento* será a verificação dos cálculos feitos pelos cinco grupos.

Momentos para o desenvolvimento do experimento: *Primeiro momento da atividade* - Organização das estrelas (Figura 6) e dos portos (Figura 7). Na primeira atividade, os alunos devem auxiliar o professor, seguindo os passos:

1° PASSO - Fixar, com fita gomada, as estrelas na parede, que estão presas às faixas que representam os horizontes, por fitas de cetim, com o intuito de não alterar as distâncias entre eles, uma maneira de controlar os cálculos.

2° PASSO - Em frente a cada faixa de horizonte devem ser medidas distâncias, com a trena, de forma estratégica, e marcadas com os nomes dos portos, que serão impressos e fixos com fita.

3° PASSO - Arrumar as carteiras de maneira que forme cinco grupos, sem comprometer as disposições das estrelas e portos.

Segundo momento da atividade - Os alunos manipulando o instrumento Kamal, coletando dados suficientes para aplicar a tangente, por meio de cálculos, antes vistos em sala de aula. Este manuseio deve seguir os passos orientados pelo professor:

1° PASSO - Cada grupo deve selecionar dois integrantes para realizar o manuseio do comando 1, que consiste na identificação do nó, pelo Kamal, da estrela mais baixa, no qual, os alunos serão posicionados em portos específicos.

2° PASSO - Os dois integrantes selecionados devem retornar ao seu grupo e realizar o cálculo, em conjunto, para encontrar a altura angular da estrela mais baixa, registrando os resultados no quadro impresso no pergaminho exposto em anexo.

3° PASSO - Outros dois integrantes devem ser selecionados para realizar, no mesmo porto, o comando 2, sendo a identificação do nó, pelo Kamal, da estrela mais alta.

4° PASSO - Semelhante ao segundo passo, os dois alunos devem retornar ao seu grupo e realizar o cálculo, em conjunto, para encontrar a altura angular das estrelas mais altas, ainda registrando os resultados no quadro impresso no pergaminho.

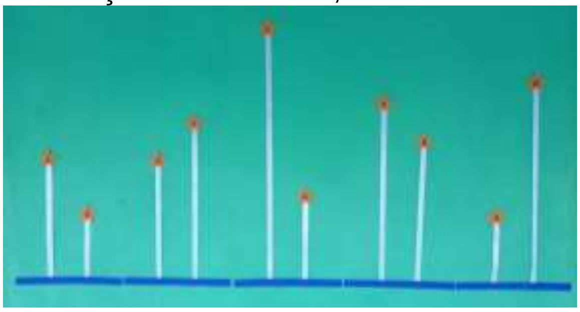
Os passos descritos serão repetidos até que todos os grupos calculem a altura angular das estrelas de cada porto, visto que, em cada porto terá apenas duas estrelas, como são cinco portos, têm-se um total de dez estrelas. Cada etapa do experimento consiste nos dois comandos abordados nos passos 1 e 3, assim, a cada etapa será feita uma rotação entre os grupos e os portos, de forma que todos observem as dez estrelas.

Terceiro momento da atividade - Após os grupos realizarem os cálculos, deve haver a verificação de tais resultados pelo professor, visto que, as dez estrelas têm a mesma altura angular para todos os grupos, pois a distância de cada porto é fixa.

Durante o *primeiro momento* os alunos, juntamente com o professor, deverão realizar a seguinte organização:

Revista AMAzônica, LAPESAM/GMPEPPE/UFAM/CNPq
ISSN 1983-3415 (versão impressa) - eISSN 2558 – 1441 (Versão digital)

Figura 6 – Fixação das estrelas, atreladas aos horizontes



Fonte: Elaborado pelos autores.

Acima estão dispostas as dez estrelas que os alunos irão calcular a altura angular. Cada fita condiz a distância do horizonte, representado pelos recortes em azul, até a estrela, para facilitar o trabalho do professor ao fixar na parede, visto que, com as fitas não será necessário realizar todas as medições novamente. Esta disposição refere-se apenas a uma simulação de como os navegadores observavam. Abaixo temos as distâncias necessárias para a observação de cada estrela.

Figura 7 – Disposição dos portos

Fonte: Elaborado pelos autores.

Já no *segundo momento*, o professor irá pedir para os alunos calcularem a altura angular das estrelas, seguindo os passos abordados anteriormente, onde os levará a aplicar os conceitos de relações trigonométricas, em específico a tangente, que deve ser abordada antes em sala de aula. Para demonstrarmos o procedimento de cálculos que os alunos farão usaremos o seguinte exemplo:

Levando em consideração os alunos do grupo 1, posicionados no porto 1, cuja distância do porto à parede é de 1 metro, medida com a trena antes de iniciar o experimento, é possível observar duas estrelas. Neste caso, seguindo o comando 1, era necessário identificar o nó mais adequado para observação da estrela mais baixa, sendo que, neste porto, especificamente, a estrela 2 é a mais baixa, como visto na Figura 6. Assim, este comando deve ser efetuado da seguinte maneira Figura 8:

Figura 8 – Observação da estrela mais baixa do porto 1

Fonte: Elaborado pelos autores.

Na situação descrita e observada na figura anterior, o aluno deve chegar à conclusão de que o nó mais ideal para esta observação é o nó na 5ª posição, contagem decrescente dos 12 nós contidos na construção dos cálculos do Kamal, contada a partir da tábua, como visto no Quadro 2. Esta posição também pode ser referente ao oitavo nó, se contado, de forma crescente, da tábua para a extremidade do cordão. A quantidade de nós deve ser a mesma para todos os alunos, independente de suas alturas, visto que, a distância das estrelas aos horizontes sempre será fixa.

Com essa informação, basta utilizar o método de Prinsep, abordado anteriormente. Dessa forma, como o Kamal trabalhado possui 12 nós e uma tábua quadrada de 5 centímetros de lado, então, o nó na 5ª posição será calculado usando a unidade de comprimento L = 5l, com l = 5 cm, ou seja, L = 25 cm, aplicando no método, temos o valor que equivale a distância da tábua ao nó adequado para a observação. $\frac{6L}{5} = \frac{150}{5} = 30$. A partir desses dados é possível calcular a tangente, visto que, o cateto oposto é 2,5 cm e o cateto adjacente é 30 cm, logo, a tangente será $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{2{,}5}{30} \approx 0{,}08$. Consequentemente, este ângulo α pode ser obtido aplicando o arco tangente, assim, $\alpha = \mathrm{arctg}(0{,}08) \approx 4{,}57°$, que será a metade da altura angular da estrela observada, de acordo com a Figura 3 trabalhada e discutida anteriormente. Assim, basta duplicar o valor de α e será cumprido o objetivo do comando.

Por fim, o *terceiro momento* consiste na verificação dos cálculos realizados pelos alunos, onde o professor deve contribuir na visualização através de desenhos e sanando possíveis dúvidas. Os cálculos são adquiridos por meio da calculadora científica, por não estarmos trabalhando com valores exatos e para auxiliar na obtenção do arco tangente.

Fechamento: Ao final da sequência de atividades sugerimos que o professor solicite aos alunos que exponham suas experiências e opiniões acerca do manuseio do instrumento Kamal.

Instruções para o professor:

Orientações para a organização das estrelas, horizontes e portos:

Considere "d" a distância das estrelas aos horizontes, representadas pelas fitas brancas que surgem na Figura 6, "D" refere-se à distância da parede para o porto, expostas na Figura 7, e o nó é dado pela contagem crescente da tábua para a extremidade do cordão.

Quadro 4 – Medidas para a organização do cenário

Porto	Estrela	d	D	nó
1	1	30 cm	1,0 m	4º
	2	15 cm	1,0 m	8º
2	3	30 cm	1,7 m	7º
	4	40 cm	1,7 m	5º
3	5	65 cm	2,0 m	2º
	6	20 cm	2,0 m	10º
4	7	45 cm	1,5 m	3º
	8	35 cm	1,5 m	6º
5	9	15 cm	1,2 m	9º
	10	50 cm	1,2 m	1º

Fonte: Elaborado pelos autores.

Enredo da história: Este tópico refere-se à contextualização que o professor deve realizar antes de iniciar o experimento, a fim de situar e contribuir no entusiasmo dos alunos. Confira:

"Os mares sempre comportaram grandes desafios durante as navegações. Um instrumento usado para orientar sobre a localização das embarcações era o Kamal Náutico, onde seu primeiro registro foi por pilotos no Oceano Índico, sendo trazido, pelos marinheiros de Vasco da Gama, para a Europa, no ano de 1499, era usado para encontrar a altura angular das estrelas, principalmente aquelas mais conhecidas. Neste momento, cinco embarcações de piratas partiram em busca de um único tesouro, parando em portos para roubar mercadorias. Cada tripulação seguiu por caminhos distintos, pois partiram de locais diferentes, fazendo uso do Kamal, de 12 nós, para seguir em frente com sua jornada.

Quem conseguirá encontrar o tesouro primeiro?

Atenção, piratas, será feita uma rota passando por portos nomeados de forma numérica, ou seja, os portos 1, 2, 3, 4 e 5. Vocês devem seguir as orientações até que encontrem as alturas angulares das dez estrelas visíveis no céu. Serão disponibilizados cinco minutos para a observação e o cálculo da altura angular de uma estrela, ao final do tempo, irá haver um aviso sonoro, para seguirem os próximos comandos, se caso o sinal tocar e a etapa não tiver sido concluída, dividam as tarefas entre a equipe e continuem a missão. Esta missão será composta de cinco etapas com dois comandos, para cada um deles devem ser designados dois piratas distintos, com direito a cinco minutos.

Cada embarcação irá receber um pergaminho (em anexo), para registrar os dados obtidos a partir da observação das estrelas, realizadas através do Kamal Náutico. Além disso, no pergaminho estão contidas as informações acerca da ordem de ataque aos portos.

Todos prontos para navegar por esta jornada?".

Além disso, também há a questão das cinco etapas e dos comandos, confira como os alunos devem ser norteados nas duas primeiras etapas:

ETAPA 1: Para cumprir essa etapa, enviem dois piratas para os seguintes portos:

Quadro 5 – Divisão dos portos

Grupo	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Porto	1	2	3	4	5

Fonte: Elaborado pelos autores.

Após posicionados: COMANDO 1 - Estrela mais baixa

Utilizando o Kamal, encontre o nó mais adequado para o cálculo da altura da estrela mais baixa em relação ao horizonte. Lembrem-se que a contagem de nós deve ser feita por cada aluno da dupla, para que o resultado seja acordado entre os dois membros.

Quadro 6 – Estrelas mais baixas

Grupo	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Estrela	2	3	6	8	9

Fonte: Elaborado pelos autores.

Depois da coleta desses dados, retornem aos seus navios e calculem, junto aos outros integrantes, a altura angular da estrela que foi observada por vocês, em seguida, registrem os resultados dos cálculos no pergaminho.

COMANDO 2 - Estrela mais alta

Ainda no mesmo Porto, enviem outros dois piratas para observarem o nó correspondente à observação da estrela mais alta, ainda verificada pelos dois piratas.

Quadro 7 – Estrelas mais altas

Grupo	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Estrela	1	4	5	7	10

Fonte: Elaborado pelos autores.

Retornando aos navios para a realização dos cálculos e o registro no pergaminho.

ETAPA 2: Finalizando a etapa 1, a segunda será semelhante, com alteração apenas no porto a ser visitado, no qual serão feitos os mesmos dois comandos, sendo que, cada um desses comandos ainda deve ser realizado em 5 minutos.

O primeiro: a observação da estrela mais baixa vista do porto, feita por cada membro da dupla, e o cálculo da angulação realizada em equipe, seguida do registro no pergaminho.

O segundo: segue os mesmos passos, mas sendo a observação da estrela mais alta.

De maneira semelhante ocorrem as três últimas etapas, alternando para o porto vizinho e realizando os mesmos comandos, rotacionando até que os cinco grupos passem por todos os portos.

Pergaminho preenchido: no quadro abaixo é possível encontrar todos os dados, desde as informações iniciais até a altura angular das estrelas. Para os alunos, este quadro deve ser impresso apenas com a primeira coluna preenchida e em uma imagem representando um pergaminho, para tornar-se mais próximo à contextualização, assim como mostra a Figura 9, após o quadro. Lembre-se que, L = 5l, sendo l = 5 cm, por conta da tábua do Kamal, assim L = 25 cm, consequentemente 6L = 6(25) = 150, numerador permanente durante os cálculos.

Quadro 8 – Medidas para determinar a altura angular

Estrela	Posição decrescente	Prinsep	Tg(α) = $\frac{CO}{CA}$ = x	Arctg(x) = α	Altura angular (2α)
1	9	$\frac{150}{9} \approx$ 16,67	$\text{tg}(\alpha) = \frac{2,5}{16,67} \approx$ 0,15	$\alpha \approx 8,53°$	$2\alpha \approx 17,06°$
2	5	$\frac{150}{5} =$ 30,00	$\text{tg}(\alpha) = \frac{2,5}{30} \approx 0,08$	$\alpha \approx 4,57°$	$2\alpha \approx 9,14°$
3	6	$\frac{150}{6} =$ 25,00	$\text{tg}(\alpha) = \frac{2,5}{25} = 0,10$	$\alpha \approx 5,71°$	$2\alpha \approx 11,42°$
4	8	$\frac{150}{8} =$ 18,75	$\text{tg}(\alpha) = \frac{2,5}{18,75} \approx 0,13$	$\alpha \approx 7,41°$	$2\alpha \approx 14,82°$
5	11	$\frac{150}{11} \approx$ 13,64	$\text{tg}(\alpha) = \frac{2,5}{13,64} \approx 0,18$	$\alpha \approx 10,20°$	$2\alpha \approx 20,40°$
6	3	$\frac{150}{3} =$ 50,00	$\text{tg}(\alpha) = \frac{2,5}{50} = 0,05$	$\alpha \approx 2,86°$	$2\alpha \approx 5,72°$
7	10	$\frac{150}{10}$ =15,00	$\text{tg}(\alpha) = \frac{2,5}{15} \approx 0,17$	$\alpha \approx 9,65°$	$2\alpha \approx 19,30°$
8	7	$\frac{150}{7} \approx$ 21,43	$\text{tg}(\alpha) = \frac{2,5}{21,43} \approx 0,12$	$\alpha \approx 6,84°$	$2\alpha \approx 13,68°$
9	4	$\frac{150}{4} =$ 37,50	$\text{tg}(\alpha) = \frac{2,5}{37,5} \approx 0,07$	$\alpha \approx 4,00°$	$2\alpha \approx 8,00°$
10	12	$\frac{150}{12} =$ 12,50	$\text{tg}(\alpha) = \frac{2,5}{12,5} = 0,20$	$\alpha \approx 11,31°$	$2\alpha \approx 22,62°$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Todos esses dados devem ser encontrados pelos alunos durante os momentos da atividade, visto que, já demarcamos cada distância e realizamos os experimentos com diferentes pessoas, principalmente com alturas distintas, mas, ao final, todas chegaram às mesmas conclusões.

Para o registro das medidas durante a atividade, como sinalizado anteriormente propõe-se o uso de um pergaminho (arquivo em anexo). Como serão cinco equipes, são necessários cinco pergaminhos, que irão ser preenchidos por meio das etapas discutidas anteriormente, ou seja, a partir dos comandos e o direcionamento a cada porto. O experimento se dá por fim quando todas as equipes coletarem os dados das dez estrelas, que estão distribuídas nos cinco portos de maneira equivalente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pode-se afirmar que o objetivo deste trabalho foi cumprido, visto que, houve a apresentação da atividade proposta inicialmente, contendo a metodologia e aporte teórico suficiente para sua compreensão e situação histórica do instrumento selecionado, assim como a presença da TSD em seu desenvolvimento.

A construção do Kamal foi simples, podendo até ser feita em conjunto com os alunos, pois são precisos poucos materiais, mas a supervisão para os nós deve ser minuciosa, pois influencia diretamente nos cálculos. Durante esta confecção pode ser trabalhado o uso de esquadros para o desenho da tábua quadrada, assim como o encontro das diagonais, que representa o centro da tábua.

Durante a produção do experimento proposto, foram necessárias várias observações, visto que, o foco era a padronização de medidas, para auxiliar caso algum professor deseje realizar esta aplicação. Os testes não foram complicados, já que, o Kamal é um instrumento de fácil manipulação, sendo um benefício, se houver adaptações da atividade trabalhada.

Portanto, espera-se que haja uma abertura para aplicar este experimento, uma vez que, seria uma abordagem totalmente diferente das regências tradicionais, contribuindo na motivação dos alunos. Outro ponto a destacar é sobre a constatação da matemática em uma realidade prática, ou seja, possibilita, aos estudantes, vivenciar aplicações matemáticas no cotidiano, sendo perceptível a presença das Relações Trigonométricas em conjunto com a História da Matemática, isso acrescenta no conhecimento ensinado.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, L. (1998). *Instrumentos de Navegação*. Lisboa: Comissão Nacional para a Comemoração dos Descobrimentos Portugueses.

ALMOULOUD, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. 3. ed. Curitiba: UFPR.

BATISTA, A. N. S.; PEREIRA, A. C. C. (2022). Instrumentos náuticos contidos em tratados portugueses e espanhóis produzidos entre os séculos XVI e XVIII para articulação entre história e ensino de Matemática. *Revista Cearense de Educação Matemática*, 1, 1-21. https://doi.org/10.56938/rceem.v1i2.3219

BATISTA, A. N. S.; PEREIRA, A. C. C. (2023). Um levantamento nacional e internacional de pesquisas que mobilizaram ou articularam saberes geométricos e trigonométricos por meio de instrumentos ou tratados antigos. *Revista História da Matemática para Professores*, *[S. l.]*, 9(1), 1–10.

BATISTA, P. C. S. (2019). *Contribuições da teoria das situações didáticas para resignificação da prática de professores que ensinam matemática*. 2019. 160 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico ou Profissional em 2019) - Universidade Estadual do Ceará.

BRASIL. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática. Brasília: Ministério da
Educação, Secretaria de Educação Fundamental.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 7(2), 33-116. https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/

BROUSSEAU, G. (2008). *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. São Paulo: Ática.

CEARÁ. Secretaria da Educação do Estado do Ceará. (2021). *Documento Curricular Referencial do Ceará*: ensino médio. Fortaleza: SEDUC.

CHAQUIAM, M. (2017). *Ensaios temáticos história e matemática em sala de aula*. Belém: SBEM.

FLICK, U. (2009). *Introdução à pesquisa qualitativa* / Uwe Flick: tradução Joice Elias Costa. - 3. ed. - Porto Alegre: Artmed.

GIL, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. São Paulo: Atlas.

MENDES, I. A. (2022). *Usos da história no ensino de matemática*: reflexões teóricas e experiências. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física.

OLIVEIRA, F. W. S (2018). Os momentos da teoria das situações didáticas no ensino de matemática. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, Bento Gonçalves, RS, 4(2), 10–20. https://doi.org/10.35819/remat2018v4i2id2949

PEREIRA, A. C. C.; BATISTA, A. N. de S. (2017). A Matemática do Kamal: Uma Possibilidade de Inserção no Ensino. *Conexões-Ciência e Tecnologia*, 4, 25-34. https://doi.org/10.21439/conexoes.v10i4.1141

SILVA, L. P. da (1946). Kamal, tábuas da índia e tavoletas náuticas. *Obras Completas*, Vol. III, (Lisboa: Agência Geral das Colónias: Anais das Bibliotecas e Arquivos, 3, 29-41.

SAITO, F. (2015). *História da matemática e suas (re)construções contextuais*. São Paulo: Livraria da Física.

Recebido: 15.04.2024 **Aceito: 25/06.2024** **Publicado: 01.07.2024**

Autores:

Autor 1: Letícia de Souza Castro
Graduação em licenciatura em matemática pela Universidade Estadual do Ceará. Email: leticinha.castro@aluno.uece.br. Orcid: https://orcid.org/0009-0002-2584-6785
Autor 2: Tamiris Paula de Moura
Graduação em licenciatura em matemática pela Universidade Estadual do Ceará. Email: tamiris.paula@aluno.uece.br. Orcid: https://orcid.org/0009-0008-9114-7484
Autor 3: Francisco Wagner Soares Oliveira
Doutor em educação e professor adjunto do curso de licenciatura em matemática da Universidade Estadual do Ceará. Email: wagneruece.oliveira@uece.br. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-9296-8200

ISSN 1983-3415 (versão impressa) - eISSN 2558 – 1441 (Versão digital)

Anexo

Integrantes do grupo:

Dados encontrados:

Estrela	Posição decrescente	Prinsep	$Tg(\alpha) = \frac{CO}{CA} = x$	$Arctg(x) = \alpha$	Altura angular (2α)
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					